ETH Zürich
Dept. Informatik

Prof. Markus Gross
WS 04/05

Informationstheorie

Lösung 7

7.1 Huffman Baum zum Auffwärmen

a) Das Applet liefert die folgenden Codes:

	a	b	c	d	e	f	g	$E[l_c]$
Code X	010	101	11	00	1000	1001	011	2.63
Code Y	10	000	00110	0010	01	00111	11	2.43

b) Textkompressionsprogramme wie Zip nutzen nicht nur die nicht-uniforme Verteilung der Buchstaben, sondern auch Abhängigkeiten zwischen den Buchstaben (z.B. folgt auf ein "c" meistens ein "h", auf "ei" häufig ein "n" etc.).

7.2 Optimale Codes und Huffman-Algorithmus

a) Der Huffman-Baum ist in Abbildung 1 dargestellt. Die Buchstaben werden codiert durch

a	b	c	d	e	f	g	h
0100	0101	1110	1111	011	110	00	10

und $w = c\,e\,b\,g\,a\,h\,d\,f\,g$.

b) Für $D > 2$ fasst der Algorithmus jeweils D Knoten zusammen. Dabei kann es geschehen, dass für die Wurzel nicht mehr D Knoten zur Verfügung stehen. In diesem Fall wird

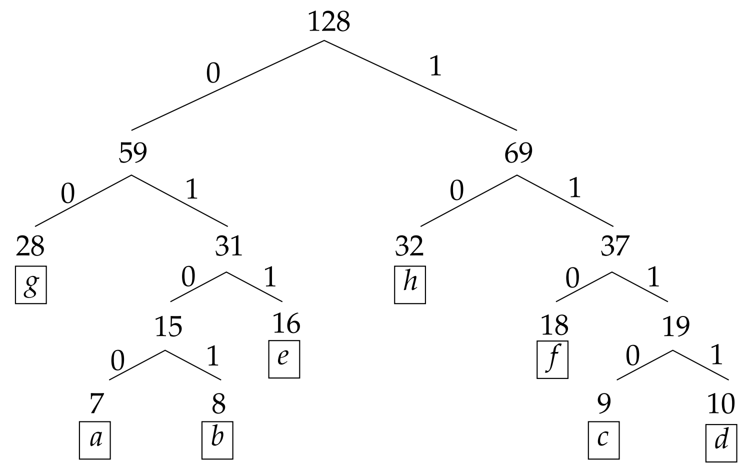


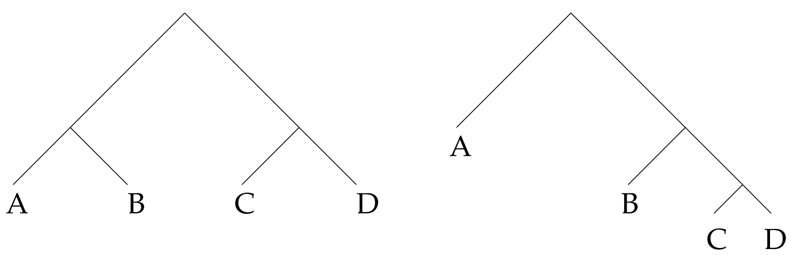
Abbildung 1: Der Huffman-Baum zu Aufgabe 6.1.a). Wahrscheinlichkeiten sind in $\frac{1}{128}$ angegeben.

der Code sicher nicht optimal sein. Die Lösung ist, zu Beginn Dummy-Blätter mit WSK 0 hinzuzufügen. Da in jedem Schritt des Algorithmus $D - 1$ Knoten wegfallen, müssen total $1 + k(D-1)$ Knoten vorhanden sein, wobei k die Anzahl Schritte ist. Also werden soviele Dummy-Knoten dazugefügt, bis die Anzahl Knoten von der gewünschten Form ist. Die Dummy-Knoten treten nie auf (WSK 0), weshalb sie die mittlere Codelänge nicht verändern.

c) Wir benötigen $1 + k(D-1) = 1 + 2k$ Blätter, d.h. wir müssen ein Dummyblatt einführen. Zwei mögliche optimale Codes sind

WSK	0.3	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1	0
Code 1	0	10	11	12	20	21	22
Code 2	0	1	20	21	220	221	222

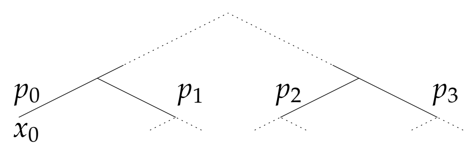
d) Damit beide Codes optimal sind, muss die Verteilung so gewählt werden, dass der Huffman-Algorithmus beide erzeugen könnte. Bei der zweiten Codierung (und somit wahrscheinlich auch bei der ersten) werden zuerst C und D zusammengefasst. Das heisst sie müssen die kleinsten Wahrscheinlichkeiten haben. Die erste Codierung fasst dann zuerst A und B zusammen, die zweite Codierung hingegen B und den neuen Knoten, welcher aus C und D entstanden ist.



Das heisst aber nichts anderes, als dass $P(\mathrm{B}) \leq P(\mathrm{A}) = P(\mathrm{C}) + P(\mathrm{D})$ gelten muss.
Eine mögliche Verteilung ist $P(\mathrm{A}) = P(\mathrm{B}) = 1/3$ und $P(\mathrm{C}) = P(\mathrm{D}) = 1/6$.

7.3 In ein Bit codiert

Bei Zufallsvariablen mit weniger als 4 Werten wird der wahrscheinlichste Wert immer mit einem Bit codiert. Im Folgenden betrachten wir also nur Zufallsvariablen mit mindestens 4 Werten.



Die Wahrscheinlichkeit des wahrscheinlichsten Wertes x_0 sei p_0. Damit der Wert x_0 mit mehr als einem Bit codiert wird, muss er im Huffman-Algorithmus *vor* dem letzten Schritt mit einer Gruppe, deren Wahrscheinlichkeit p_1 sei, vereinigt werden. Deshalb muss es noch eine andere Gruppe geben, welche eine Wahrscheinlichkeit grösser als p_0 hat. Diese Gruppe wurde selbst aus zwei Gruppen, deren Wahrscheinlichkeiten p_2 und p_3 seien, gebildet. Diese beiden Gruppen dürfen aber beide keine grössere Wahrscheinlichkeit als p_1 haben, denn sonst wären sie nicht miteinander vereinigt worden.

Um x_0 mit mehr als einem Bit zu codieren, werden also mindestens 3 Gruppen benötigt, von denen die Summe der kleineren beiden grösser sein muss als p_0. Da diese Summe maximal $2\frac{1-p_0}{3}$ betragen kann, erhalten wir

$$2\frac{1-p_0}{3} \geq p_0 \quad \Leftrightarrow \quad p_0 \leq 0.4.$$

Für $p_0 > 0.4$ wird deshalb x_0 immer mit einem Bit codiert. Diese Grenze ist optimal, da es für $p_0 = 0.4$ eine Zufallsvariable gibt, in welcher x_0 in einem optimalen Code mit zwei Bit codiert wird:

x	x_0	x_1	x_2	x_3
$P_X(x)$	0.4	0.2	0.2	0.2
$C(x)$	00	01	10	11

7.4 Bedingte Entropie und Fehlerwahrscheinlichkeit

a) Sei $1 \leq j \leq N$. Zunächst stellen wir fest, dass X gegeben $Y = j$ uniform auf 2^j Elementen verteilt ist, was

$$H(X|Y=j) = j \qquad \text{für } j = 1, \ldots, N$$

impliziert. Daraus erhalten wir

$$H(X|Y) = \sum_{j=1}^{N} P_Y(j) H(X|Y=j) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} j,$$

wobei wir verwendet haben, dass Y uniform auf $\{1, \ldots, N\}$ ist. Daraus folgt

$$H(X|Y) = \frac{N+1}{2}. \tag{1}$$

b) Die Fano-Ungleichung $h(P_e) + P_e \log_2(|\mathcal{X}| - 1) \geq H(X|Y)$ besagt in diesem Fall wegen (1) und $|\mathcal{X}| = |\{0,1\}^N| = 2^N$

$$h(P_e) + P_e \log_2(2^N - 1) \geq \frac{N+1}{2}. \tag{2}$$

Diese Bedingung ist äquivalent zu

$$f_N(P_e) \quad \geq \quad 0$$

wobei $f_N : [0,1] \to [0,1]$ durch

$$f_N(p) := h(p) + p \log_2(2^N - 1) - \frac{N+1}{2}$$

definiert ist. Aus Abbildung 2 können wir daher ablesen, dass

$$\begin{aligned} P_e &\geq 0.39 \qquad \text{für } N = 4 \\ P_e &\geq 0.43 \qquad \text{für } N = 8. \end{aligned}$$

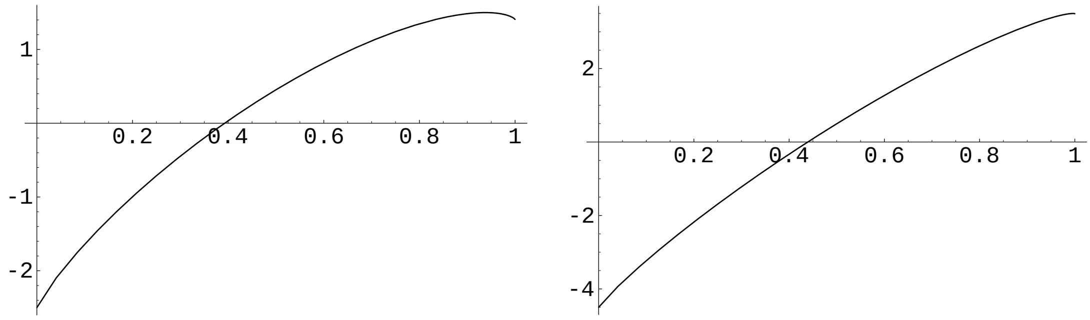


Abbildung 2: Die Funktionen f_4 (links) und f_8 (rechts)

Um den Grenzfall $N \to \infty$ zu untersuchen, formen wir (2) um zu

$$P_e \geq \frac{N + 1 - 2h(P_e)}{2\log_2(2^N - 1)}.$$

Es ist leicht nachzuprüfen, dass der Term auf der rechten Seite dieser Ungleichung gegen $\frac{1}{2}$ strebt.

c) Gegeben dass $Y = j$, ist die beste Strategie um X zu schätzen, zufällig eines der $x \in \{0, 1\}^N$ mit $P_{X|Y}(x|j) > 0$ zu wählen. Gegeben $Y = j$ ist dabei die Erfolgswahrscheinlichkeit gleich 2^{-j}. Die mittlere Erfolgswahrscheinlichkeit P_s über das ganze Experiment ist dann

$$P_s = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} 2^{-j} = \frac{1}{2N}\sum_{j=0}^{N-1} 2^{-j} = \frac{1}{2N} \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^N}{1 - \frac{1}{2}}$$

Daraus erhalten wir schliesslich

$$P_e = 1 - P_s = 1 - \frac{1}{N}(1 - (\frac{1}{2})^N)$$

und

$$\begin{aligned} P_e &= 0.7656 \quad \text{für } N = 4 \\ P_e &= 0.8755 \quad \text{für } N = 8, \end{aligned}$$

woraus wir sehen, dass die Fano-Ungleichung hier nur eine relativ schlechte untere Schranke an P_e gibt.