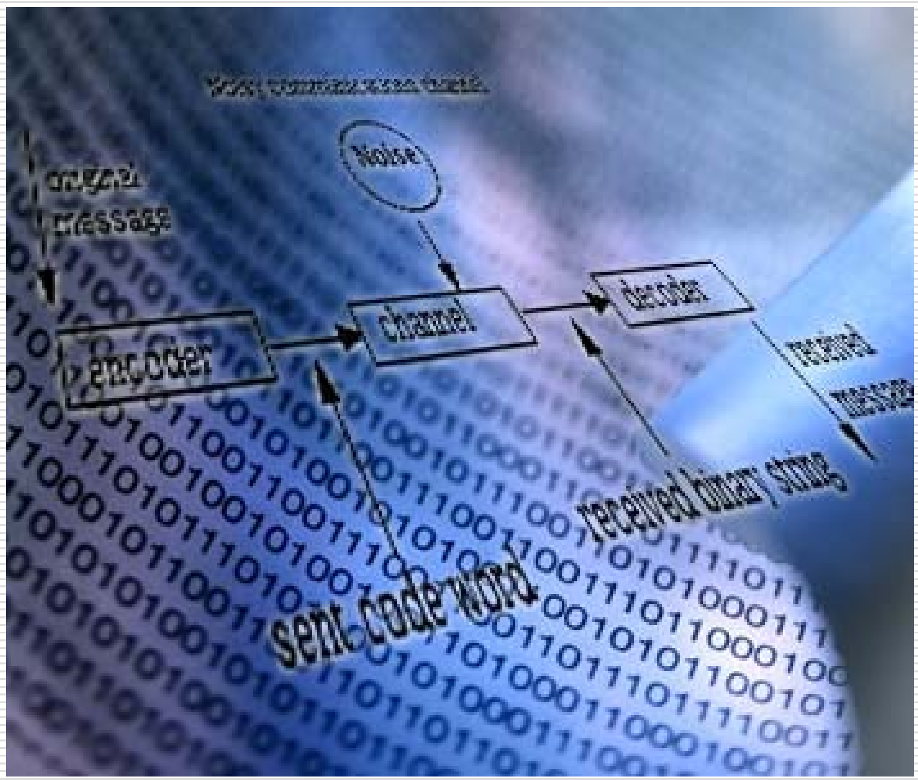
Kapitel 12: Codierungstheorem und Fehlerkorrektur



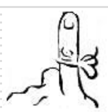
Ziele des Kapitels

- Shannon'sches Kanalcodierungstheorem
- Fehlerkorrektur
- Parity-Check-Matrix

Fehlerwahrscheinlichkeit

- Annahme (o.B.d.A.): $[U_1,\ldots,U_K]$ sind zufällig und gleichverteilt.
- Damit gilt: $H(U^K) = K$
- Wir betrachten die mittlere Bitfehlerwahrscheinlichkeit, d.h. den Bruchteil der falschen Bits am Ausgang

$$\overline{P_e} = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K} P[\tilde{U}_i \neq U_i]$$



Eine beliebige Bitfolge einer Informationsquelle kann zunächst ideal komprimiert werden. Nach dieser Quellcodierung approximiert die Bitfolge der Codewörter eine zufällige, gleichverteilte Bitfolge beliebig gut. Warum?

Fehlerwahrscheinlichkeit

- Es gilt

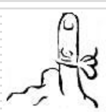
$$H(U^K \mid \tilde{U}^K) \geq K - NC = K\left(1 - \frac{C}{R}\right)$$

- Hieraus erhalten wir mit der Fano-Ungleichung den ersten Teil des Shannon'schen Kanalcodierungstheorems

Theorem Shannon, Teil 1

- Theorem (Shannon I): Wenn ein DGK mit Kapazität C zur Übertragung echt zufälliger Informationsbits mit Rate $R>C$ benutzt wird, so gilt für die mittlere Bitfehlerwahrscheinlichkeit beim Empfänger

$$h(\overline{P}_e) \geq 1 - \frac{C}{R}$$



Dieses Theorem erlaubt es uns, eine einfache Unterschranke für den Fehler anzugeben, wenn wir mit Raten oberhalb der Kapazität übertragen

Theorem Shannon, Teil 1

- Der zweite Teil des Theorems von Shannon enthält ein verblüffendes Resultat
- Die Lehrmeinung war, dass die Kommunikation mit zunehmender Rate schlechter wird
- Dies ist unterhalb der Kapazität nicht der Fall!
- $R < C$ ist also nicht nur eine notwendige Bedingung, sondern auch eine hinreichende für zuverlässige Kommunikation

Theorem Shannon, Teil 2

- Theorem (Shannon II): Gegeben sei ein DGK mit Inputalphabet χ, Outputalphabet γ und Kapazität *C*.
- Für jede Rate *R* < *C* und für jedes $\varepsilon > 0$ existiert für genügend grosse Blocklänge *N* ein Code *C* mit

$$M = \left| 2^{R \cdot N} \right|$$

Codewörtern, für den die maximale Decodierfehlerwahrscheinlichkeit über alle Codewörter kleiner als ε ist:

$$\max_{1 \le j \le M} P(F \mid X^N = c_j) < \varepsilon$$

Interpretation

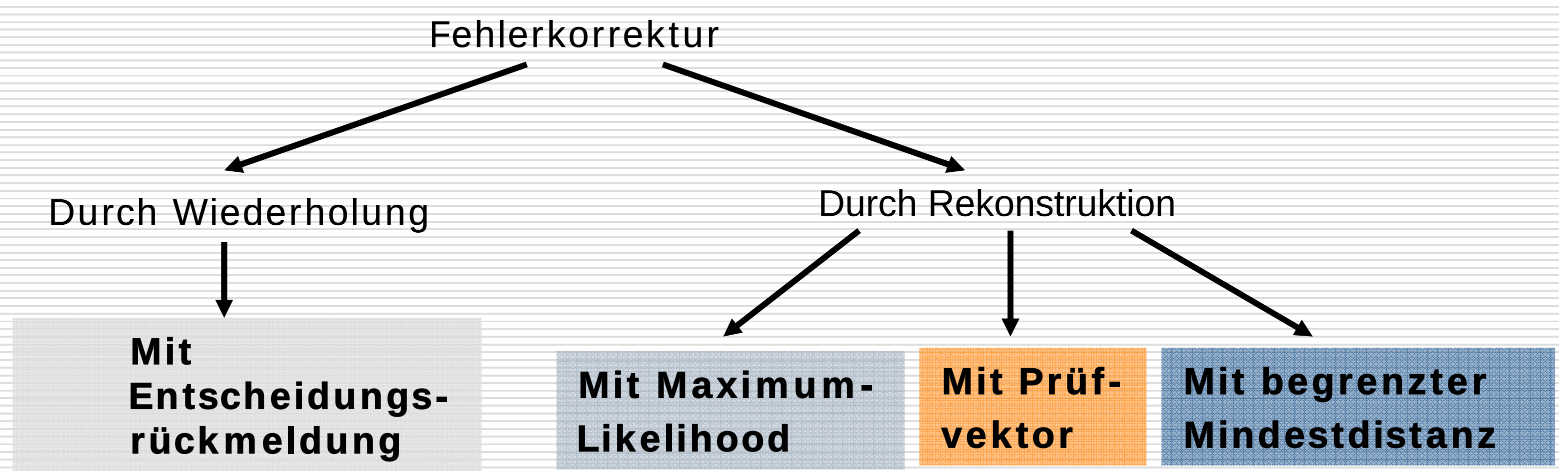
- Beweis für BSK im Skript
- Entwurf eines guten Codes ist leichter, als angenommen
- Auch eine zufällige Wahl eines Codes liefert mit hoher Wahrscheinlichkeit einen Code, der das Theorem erfüllt
- Zufällig heisst, dass alle MN Symbole unabhängig nach einer Verteilung P_X gewählt werden, welche $I(X;Y)$ maximiert und die Kapazität des Kanals erreicht
- Beim BSK sind alle Codewörter unabhängige, zufällige Bitfolgen der Länge N

Interpretation

- In der Praxis werden Codes dennoch gezielt konstruiert
- Decodierung unstrukturierter Codes ist in der Regel sehr ineffizient
- Es müssen alle Codewörter durchsucht werden
- Effiziente Decodierungsverfahren sind nur für Codes mit starker algebraischer Struktur bekannt
- Unzählige Folgearbeiten zur Konstruktion praktischer Codes
- Seit 1993 Aufbruch in Richtung der Shannon-Grenze mit „Turbo-Codes“

Prinzipien der Fehlerkorrektur

- Redundanz ist Voraussetzung für ein Korrekturverfahren
- Wir unterscheiden folgende Prinzipien



Fehlerkorrektur

- Bei Wiederholung fügt der Kanalcodierer Kontrollinformation hinzu, welche eine Fehlerdetektion ermöglicht
- Falls Fehler, wird nochmals übertragen
- Es kann sein, dass Fehler nicht erkannt werden
- Bei Rekonstruktion wird der Fehler sowohl erkannt, als auch lokalisiert
- Durch die Lokalisierung kann der Fehler dann korrigiert werden

Fehlerkorrektur

- Die Redundanz entscheidet über Restfehlerwahrscheinlichkeit
- Bei Maximum Likelihood wird jeweils das wahrscheinlichste Zeichen im Codewortalphabet gewählt
- Bei begrenzter Mindestdistanz wird nur korrigiert, wenn ein Zeichen innerhalb einer Korrekturkugel liegt
- Bei Prüfvektoren enthält der Decoder Strings, mit denen er testen kann, ob ein Zeichen zum Codealphabet gehört

Kriterien zum Codeentwurf

- Restfehlerwahrscheinlichkeit: Sie bestimmt die Güte unter der Bedingung des verwendeten Kanals
- Zeit: Diese umfasst die Zeit zur Codierung, Decodierung und Fehlerkorrektur, incl. dem Rückkanal
- Aufwand: Dieser beschreibt den (schaltungstechnischen oder algorithmischen) Aufwand zur Realisierung eines Decodierers

Blockcodes

- Definition: Ein Blockcode C mit Blocklänge N für einen Kanal mit Inputalphabet χ ist eine Teilmenge $C=\{c_1,\ldots,c_M\}$ von χ^N der N-Tupel über χ
- Typischerweise betrachten wir Codes mit $M=q^K$ Codewörtern für eine ganze Zahl $K<N$ für $|\chi|=q$
- Wir betrachten nur binäre Codes $q=2$
- Für CDs beispielsweise verwendet man $q=256$
- Mit einem Code werden K *q-äre* Zeichen in Codeworten der Länge N codiert
- K/N beschreibt den Anteil der Informationsbits, hängt also mit der Redundanz zusammen

Blockcodes

- K/N heisst auch die dimensionslose Rate
- $C_2 = \{00000, 11100, 00111, 11011\}$ ist ein binärer Code mit $N=5$ und $K=2$
- $C_3 = \{0000, 0112, 1100, 0221, 2200, 1212, 2012, 1021, 2121\}$ ist ein ternärer Code mit $N=4$ und $K=2$
- Definition: Die Hammingdistanz $d(a,b)$ zweier Wörter a und b ist die Anzahl von Positionen, in denen sich a und b unterscheiden.
- Die Minimaldistanz $d_{min}(C)$ eines Codes C ist die kleinste Hammingdistanz zwischen zwei Codewörtern

Blockcodes

- $d_{\min}(C_2)=3$, $d_{\min}(C_3)=2$
- Ein Code kann *r* Fehler detektieren, wenn für jedes Codewort und jedes Fehlermuster mit höchstens *r* Fehlern ein Fehler festgestellt werden kann
- Dies ist genau dann, wenn $d_{\min}(C) \geq r+1$
- Ein Code kann *s* Fehler korrigieren, wenn für jedes Codewort und jedes Fehlermuster mit höchstens *s* Fehlern das Codewort wieder eindeutig gefunden werden kann
- Dies ist genau dann, wenn $d_{\min}(C) \geq 2s+1$

Blockcodes

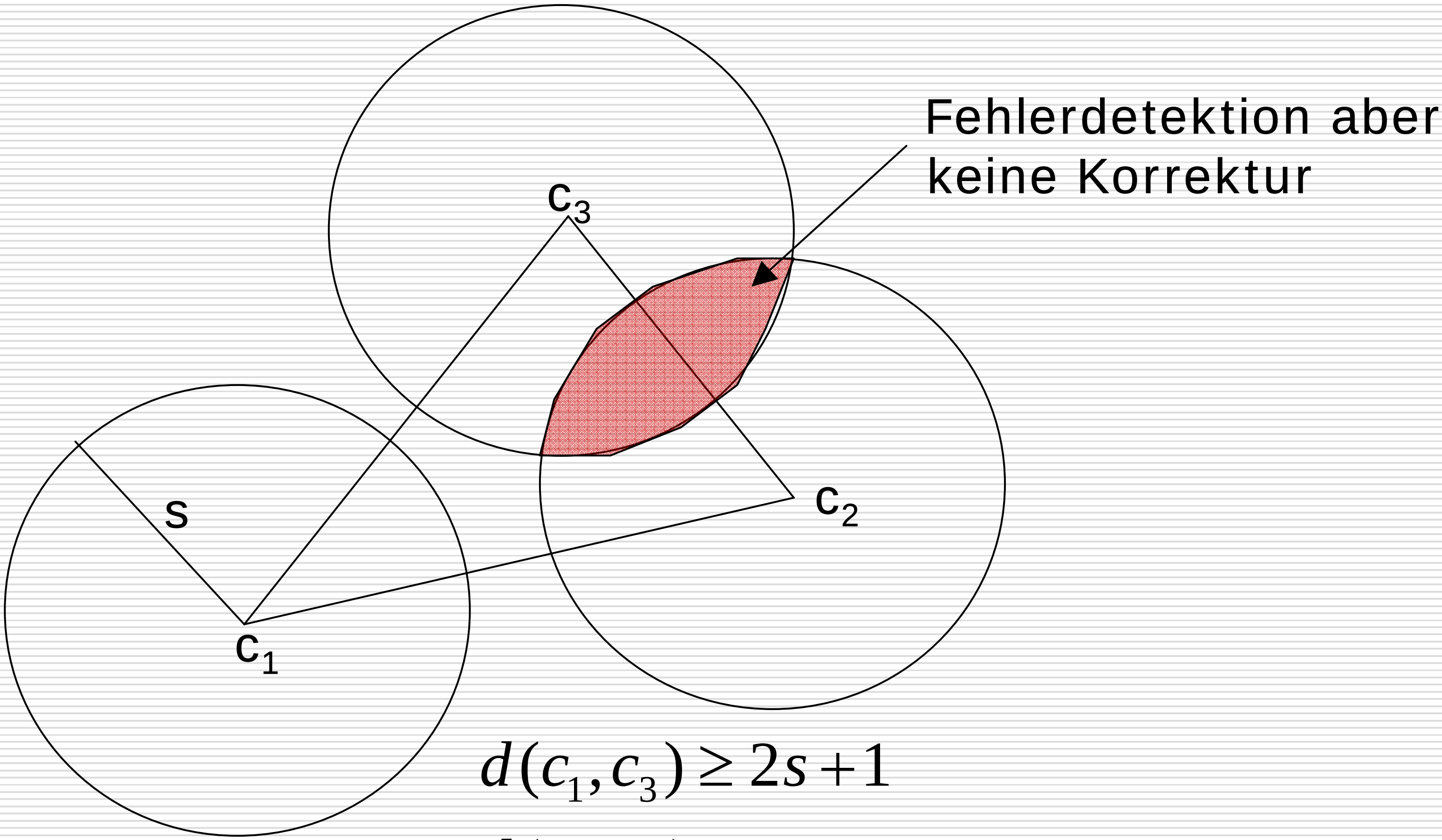
- Die Minimaldistanz ist also ein wichtiges Mass zur Worst-Case Betrachtung eines Codes
- Theorem: Ein Code mit Minimaldistanz *d* erlaubt, *d*-1 Fehler zu detektieren oder

$$\mathrm{floor}\left(\frac{d\text{-}1}{2}\right)$$

  Fehler zu korrigieren

- Man spricht auch oft von Korrekturkugeln

Korrekturkugeln



$$d(c_1, c_3) \geq 2s + 1$$

$$d(c_2, c_3) < 2s + 1$$

$$\text{aber } d(c_2, c_3) \geq s + 1 \rightarrow \text{Detektion möglich}$$

Lineare Codes

- Neben grosser Minimaldistanz ist auch effiziente Codierbarkeit und Decodierbarkeit wichtig
- Lineare Codes erlauben eine sehr effiziente Codierung, allerdings nicht unbedingt eine effiziente Decodierung
- Definition: Ein linearer Blockcode mit q^K Codewörtern der Blocklänge N über einem endlichen Körper $GF(q)$ ist ein Unterraum der Dimension K des Vektorraums der N-Tupel über $GF(q)$
- Ein solcher Code wird als $[N,K]$-Code bezeichnet

Lineare Codes

- Eine alternative Definition kann ebenfalls in der Literatur gefunden werden
- Dieser trägt der algebraischen Struktur des Codes direkt Rechnung
- Definition: Ein linearer Blockcode ist ein Code, bei dem der Codierer zur Transformation von Quellencodewörtern *a* der Länge *K* in Kanalcodewörter *c* der Länge *N* ausschliesslich Operationen verwendet, die in der algebraischen Struktur einer Gruppe definiert sind

Linearcodes als Gruppen

- Das Codealphabet bestehe aus den Wörtern

$$a_0 = (00000) \quad a_1 = (10010) \quad a_2 = (01011) \quad a_3 = (00101)$$

$$a_4 = (11001) \quad a_5 = (10111) \quad a_6 = (01110) \quad a_7 = (11100)$$

zeige, dass dieser Code die Gruppenaxiome erfüllt

- Axiom G1: Abgeschlossenheit

$$a_0 \oplus a_1 = a_4, \quad a_1 \oplus a_3 = a_5$$

$$a_2 \oplus a_3 = a_6, \quad a_2 \oplus a_5 = a_7$$

$$a_5 \oplus a_6 = a_4, \quad \text{usw.}$$

Linearcodes als Gruppen

- Axiom G2: Assoziatives Gesetz

$$(a_1 \oplus a_2) \oplus a_3 = a_1 \oplus (a_2 \oplus a_3)$$
$$(a_4 \oplus a_5) \oplus a_3 = a_4 \oplus (a_5 \oplus a_3)$$

usw.

- Axiom G3: Neutrales Element

$$a_1 \oplus a_0 = a_1$$
$$a_2 \oplus a_0 = a_2$$

usw.

Linearcodes als Gruppen

- Axiom G4: Inverses Element

$$\left(a_1 \oplus a_2\right) \oplus a_3 = a_1 \oplus \left(a_2 \oplus a_3\right)$$

$$\left(a_4 \oplus a_5\right) \oplus a_3 = a_4 \oplus \left(a_5 \oplus a_3\right)$$

usw.

- Ferner gilt das Kommutativgesetz

$$a_1 \oplus a_2 = a_2 \oplus a_1$$

$$a_1 \oplus a_3 = a_3 \oplus a_1$$

usw.

Lineare Codes

- Jeder lineare Code enthält das Nullwort 0
- Die Distanz eines Codewortes c zu 0 wir Hamminggewicht $w(c)$ genannt
- Theorem: Die Minimaldistanz eines linearen Codes ist gleich dem minimalen Hamminggewicht eines von 0 verschiedenen Codewortes
- Beweis: Seien c_1 und c_2 zwei Codewörter mit minimaler Distanz
- Aufgrund der Vektorraum-Eigenschaft ist die Differenz $c_1 - c_2$ ebenfalls ein Codewort mit Gewicht d_{min}
- Umgekehrt ist d_{min} nicht grösser als $w(c_1 - c_2)$, da die 0 im Code ist

Generatormatrix

- Die Abbildung der Informationsvektoren $a=[a_1,\ldots,a_K]$, dargestellt als K-Tupel, auf die q^K Codewörter $c=[c_1,\ldots,c_N]$ kann mittels der K x N Generatormatrix G dargestellt werden (modulo-Multiplikation)

$$c = a \cdot G$$

Generatormatrix (1)

- Die Generatormatrix G von C_2 ist

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c([2,1]) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Generatormatrix (2)

- Kanalcodealphabet nit $N=7$, $q=2$ und $K=3$

$$c_0 = (0000000)$$

$$c_1 = (1001101)$$

$$c_2 = (0101010)$$

$$c_3 = (0010010)$$

$$c_4 = c_1 \oplus c_2 = (1100111)$$

$$c_5 = c_1 \oplus c_3 = (1011111)$$

$$c_6 = c_2 \oplus c_3 = (0111000)$$

$$c_7 = c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 = (1110101)$$

Generatormatrix (2)

- C ist ein Unterraum der Grösse 2^3
- V ist 2^7 gross
- Mögliche G sind:

$$G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

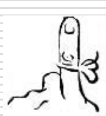
$$G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Generatormatrix

- Die Zeilen der Matrix bilden eine Basis des Codes
- Da Vektorräume verschiedene Basen besitzen, gibt es auch verschiedene Generatormatrizen für gleiche Codes
- Eine speziell geeignete Form enthält die ersten K Spalten als Einheitsmatrix I_K

$$G = \begin{bmatrix} I_K & A \end{bmatrix}$$

- A ist eine K x $(N\text{-}K)$ Matrix.
- Eine solche Generatormatrix heisst systematisch



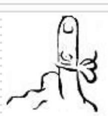
Dies bedeutet, dass das Codewort aus K Informationssymbolen besteht und N-K angefügten "Parity-Checks"

Parity-Check-Matrix

- Eine weitere bedeutende Matrix ist die Parity-Check- oder Kontrollmatrix
- Definition: Eine (*N*-*K*)x*N*-Matrix *H* heisst Parity-Check-Matrix eines linearen [*N*,*K*]-Codes *C*, falls

$$c \in C \Leftrightarrow cH^T = 0$$

- Die Zeilen von *H* spannen den (*N*-*K*)-Unterraum der Vektoren *v* auf, für die $cv^T = 0$



Dies bedeutet, dass wir damit schnell prüfen können, ob ein Codewort am Kanalausgang auch Element von *C* ist

Parity-Check-Matrix

- Theorem: Sei $G=[I_K|A]$ eine systematische Generatormatrix eines linearen Codes.
  Die $(N\text{-}K)xN$-Matrix $H=[-A^T|I_{N-K}]$ ist eine Parity-Check Matrix des Codes
- Teil 1: Zeige, dass für jedes Codewort $c=aG$, gilt

$$c \cdot H^T = 0$$

- Teil 2: Wenn, $cH^T=0$, zeige, dass c ein Codewort ist
- Beweis: Triviale Matrizenalgebra sowie Aufspalten von c in $[c_1|c_2]$