Kapitel 2: Stochastische Prozesse

Bedingte Verteilungen

- Ebenso kann die Verbundwahrscheinlichkeit von n Zufallsvariablen über bedingte Wahrscheinlichkeiten ausgedrückt werden

$$\mathrm{P}(X_1 \cdots X_n) = \mathrm{P}(X_1 \cdots X_{n-1})\mathrm{P}(X_n | X_1, \ldots, X_{n-1})$$

$$\mathrm{P}(X_1 \cdots X_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(X_i | X_1, \ldots, X_{i-1})$$

- Wiederum kommt eine Produktregel zur Anwendung

Summen- und Produktregeln sind in der Wahrscheinlichkeitsrechnung von zentraler Bedeutung

Beispiel: Verbunds WS

- Bedingte Verbundswahrscheinlichkeiten
- Sei $A = X_1$, $B = X_2$, $C = X_3$
- $n=2$: Gesetz von Bayes

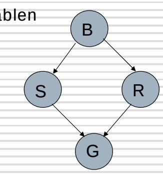
$$\mathrm{P}(A,B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B | A)$$

- $n=3$:

$$\mathrm{P}(A,B,C) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B | A) \cdot \mathrm{P}(C | A,B)$$

Bayes – Netz (1)

- Vier binäre (True, False) Zufallsvariablen
  - B: Bewölkt
  - S: Sprinkler
  - R: Regen
  - G: Gras ist nass



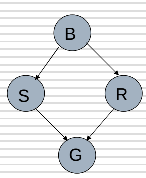
$\mathrm{P}(B=\mathrm{T})$	$\mathrm{P}(B=\mathrm{F})$
0.5	0.5

B	$\mathrm{P}(S=\mathrm{F})$	$\mathrm{P}(S=\mathrm{T})$
F	0.5	0.5
T	0.9	0.1

B	$\mathrm{P}(R=\mathrm{F})$	$\mathrm{P}(R=\mathrm{T})$
F	0.8	0.2
T	0.2	0.8

Bayes – Netz (2)

S	R	$\mathrm{P}(G=\mathrm{F})$	$\mathrm{P}(G=\mathrm{T})$
F	F	1.0	0.0
F	T	0.1	0.9
T	F	0.1	0.9
T	T	0.01	0.99



- Verbundswahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(S,B,R,G) &= \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(S | B) \cdot \mathrm{P}(R | B,S) \cdot \mathrm{P}(G | B,S,R) \\ &= \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(S | B) \cdot \mathrm{P}(R | B) \cdot \mathrm{P}(G | S,R)\end{aligned}$$

$$\text{da } \mathrm{P}(R | S) = \mathrm{P}(R)$$

Bayes – Netz (3)

- Beobachtung: Gras ist nass.
- Frage: Nass vom Sprinkler oder Regen?

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(S=\mathrm{T} | G=\mathrm{T}) &= \frac{P(S=\mathrm{T}, G=\mathrm{T})}{P(G=\mathrm{T})} \\ &= \frac{\sum_{b,r} P(B=b, S=\mathrm{T}, R=r, G=\mathrm{T})}{\sum_{b,r,s} P(B=b, S=s, R=r, G=\mathrm{T})} \\ &= \frac{0.2781}{0.6471} = 0.4237\end{aligned}$$

Bayes – Netz (4)

- Beobachtung: Gras ist nass.
- Frage: Nass vom Sprinkler oder Regen?

$$\mathrm{P}(R=\mathrm{T}\,|\,G=\mathrm{T})=\frac{P(R=\mathrm{T},G=\mathrm{T})}{P(G=\mathrm{T})}$$
$$=\frac{\sum_{b,s}P(B=b,S=\mathrm{s},R=\mathrm{T},G=\mathrm{T})}{\sum_{b,r,s}P(B=b,S=s,R=r,G=\mathrm{T})}$$
$$=\frac{0.4581}{0.6471}=0.706$$

Erwartungswert

- Der Erwartungswert E(X) einer diskreten Zufallsvariablen X ist gegeben durch

$$\mathrm{E}(X)=\sum_i x_i\,p(x_i)$$

- Dieser wird oft auch Mittelwert von *X* genannt
- Schwerpunkt der Häufigkeitsfunktion
- Erwartungswerte sind statistische Momente erster Ordnung
- Aufgrund der Linearität erhalten wir (Superposition)

$$Y=aX+b\Rightarrow \mathrm{E}(Y)=a\mathrm{E}(X)+b$$

Geometrische Verteilung

- Produkt ist defekt mit Wahrscheinlichkeit *p*
- Wie viele Produkte müssen untersucht werden, bis ein defektes Produkt gefunden wird?
- *X*: Anzahl inspizierter Produkte

$$\mathrm{P}(X=\mathrm{k})=\mathrm{P}_X(k)=q^{k-1}\cdot p \qquad \text{wobei } q=1\text{-}p$$
$$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot p\cdot q^{k-1}=p\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot q^{k-1} \qquad \text{wobei } k\cdot q^{k-1}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\cdot q^k$$
$$=p\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot q^k=p\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\cdot\frac{q}{1-q}$$
$$=\frac{p}{(1-q)^2}=\frac{1}{p}$$

Varianz

- Die Varianz Var(*X*) einer diskreten Zufallsvariablen *X* ist gegeben durch

$$\mathrm{Var}(X)=\mathrm{E}\left\{[X-\mathrm{E}(X)]^2\right\}$$

- Vorausgesetzt, dass *E* existiert
- Für eine diskrete Zufallsvariable *X* mit *p*(*x*) ergibt sich

$$\mathrm{Var}(X)=\sum_i (x_i-\mathrm{E}(X))^2\,p(x_i)$$

- Ebenso erhalten wir

$$Y=aX+b\Rightarrow \mathrm{Var}(Y)=a^2\mathrm{Var}(X)$$

Bernoulli - Verteilung

- *X* hat Bernoulli - Verteilung

$$X=0\to 1-p$$
$$X=1\to p$$

$$\mathrm{E}(X)=0\cdot(1-p)+1\cdot p=p$$
$$\mathrm{Var}(X)=(0-p)^2\cdot(1-p)+(1-p)^2\cdot p=p\cdot(1-p)$$

$$\to \text{Maximum bei } p=\frac{1}{2}$$

Standardabweichung

- Die Standardabweichung σ ist gegeben durch

$$\sigma=\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\,,$$

  und beschreibt eine Art mittlere Abweichung (Streuung) der Daten vom Mittelwert
- Die Varianz wird oft zur Fehlerberechnung in Messungen verwendet
- Man definiert dazu den mittleren quadratischen Fehler

$$MSE=\mathrm{E}\left[(X-x_0)^2\right]$$

Kovarianz

ETH

- Die Kovarianz *misst die Verbundvariabilität zweier Zufallsvariablen X und Y*

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}(X))(Y - \mathrm{E}(Y))]$$

- Oftmals wird folgende Notation verwendet

$$\mathrm{E}(X) = \mu_X \quad \mathrm{E}(Y) = \mu_Y$$

- Es gilt auch

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\cdot\mathrm{E}(Y)$$

oder auch

$$\mathrm{Cov}(X,Y+Z) = \mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(X,Z)$$

- Und vieles mehr... (siehe Rice pp.131ff)

Korrelation

ETH

- Die Korrelation zweier Zufallsvariablen X und Y wird über Varianz und Kovarianz definiert

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}$$

- Sie ist von grosser praktischer Bedeutung
- Schliesslich bleibt der bedingte Erwartungswert

$$\mathrm{E}(Y, X = x) = \sum_y y p_{Y|X}(y|x)$$

- Es gilt auch

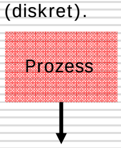
$$\mathrm{E}(Y) = \sum_x \mathrm{E}(Y|X = x) p_X(x) = \mathrm{E}(\mathrm{E}(Y|X))$$

- Vergleiche Marginalisierung

Stochastische Prozesse

ETH

- Ein stochastischer Prozess $\{X(t_i)\}$ ist ein Wahrscheinlichkeitsprozess, welcher eine Sequenz von Zufallsvariablen $X(t_i)$ erzeugt.
- Zu jedem Zeitpunkt t_i existiert also eine Zufallsvariable, die einer bestimmten Verteilung unterliegt (kontinuierlich) oder bestimmte Werte annehmen kann (diskret).



$$\{X(t_0) = x_0, X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, X(t_3) = x_3 \ldots\}$$

Stochastische Prozesse

ETH

- Diskret bezieht sich also auf Zeit t_i sowie auf mögliche Werte x_k
- Beispiel: Folge von Münzwürfen mit Wahrscheinlichkeiten p für Kopf und $q=1-p$ für Zahl
- Hierbei gilt die statistische Unabhängigkeit der einzelnen Ergebnisse:

$$x \in \{Kopf, Zahl\}$$

- Es gilt also für zwei beliebige diskrete Zeiten t_i und t_j

$$\mathrm{P}(X(t_i)|X(t_j)) = \mathrm{P}(X(t_i))$$

- Das muss nicht so sein (Markov-Ketten)!

Stationarität

ETH

- Ein stochastischer Prozess, dessen statistische Eigenschaften invariant unter Translation der Zeit bleiben, heisst stationär.
- Dies bezieht sich auf Momente verschiedener Ordnung
- In der Praxis oft auf Erwartungswerte beschränkt
- Dann gilt also:

$$E(X(t_j)) = E(X(t_{j+k}))$$

oder auch, dass die Verbundwahrscheinlichkeiten

$$P(X(t_i), X(t_j)) = f(t_i - t_j)$$

nur von der Zeitdifferenz abhängen

Ergodizität

ETH

- Um einen ergodischen, stochastischen Prozess zu definieren, bedarf es einer neuen Variablen

$$X_e = \lim_{r\to\infty} \frac{X(t_i) + X(t_{i+1}) + X(t_{i+2}) + \cdots + X(t_{i+r})}{r+1}$$

- Wir mitteln also über die Werte der Zufallsvariablen einer immer grösseren Sequenz
- Konvergiert dieser Grenzwert gegen eine Konstante X_e gilt für eine beliebige Zufallsvariable $X(t_i)$

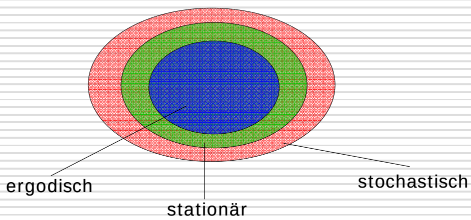
$$\mathrm{E}(X(t_i)) = \langle \mathrm{E}_s \rangle$$

- Der Erwartungswert über die Zeit ist also gleich dem Erwartungswert der Einzelvariablen

Stochastische Prozesse

ETH

- Ergodische Prozesse sind also Untermengen von stationären, stochastischen Prozessen



Markov-Prozesse

ETH

- Ein stochastischer Prozess, welcher eine Sequenz von Zufallsvariablen $\{X_i\}$ ist, heisst Markov-Kette, wenn gilt

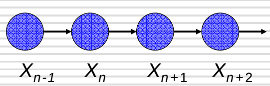
$$\mathrm{P}(X_n = x_k | X_1, \dots X_{n-1}) = \mathrm{P}(X_n = x_k | X_{n-1})$$

- Die bedingte Wahrscheinlichkeit für eine Zufallsvariable ist also nur von ihrem direkten Vorgänger abhängig
- Markov-Ketten werden mit einer Uebergangswahrscheinlichkeitsmatrix beschrieben, deren Elemente wie folgt gegeben sind

$$\mathrm{P}_{k|l} = \mathrm{P}(X_n = x_k | X_{n-1} = x_l)$$

Markov-Ketten

ETH



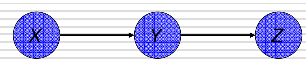
- Die Berechnung der Verbundwahrscheinlichkeit erfolgt durch Produktbildung

$$P(X_{n-1}, X_n, X_{n+1}, X_{n+2}) =$$
$$P(X_{n-1}) P(X_n | X_{n-1}) P(X_{n+1} | X_n) P(X_{n+2} | X_{n+1})$$

- Ebenso können bedingte Wahrscheinlichkeiten zu Markov-Feldern erweitert werden

3-stufige Markovkette

ETH



- $\mathrm{P}(X,Y,Z) = \mathrm{P}(X) \cdot \mathrm{P}(Y \mid X) \cdot \mathrm{P}(Z \mid Y)$
- Bedingte Wahrscheinlichkeit

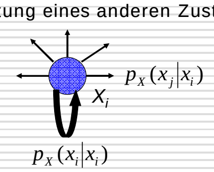
$$\mathrm{P}(X,Z \mid Y) = \frac{\mathrm{P}(X,Y,Z)}{\mathrm{P}(Y)} = \frac{\mathrm{P}(X,Y) \cdot \mathrm{P}(Z \mid Y)}{\mathrm{P}(Y)}$$
$$= P(X \mid Y) \cdot P(Z \mid Y)$$

- Spezialfall eines Bayes-Netzes

Markov Zustandsautomaten

ETH

- Markov-Prozesse eignen sich zur verfeinerten Modellierung einzelner diskreter Zufallsvariablen
- Dazu verwendet man einen probabilistischen, endlichen Automaten, welcher alle Zustände $\{x_i\}$ einer Variablen Z beschreibt
- Jeder Zustand x_i bleibt entweder erhalten, oder wird in Richtung eines anderen Zustandes x_j verlassen



Markovsche Modelle

ETH

- Dies wird mit Übergangswahrscheinlichkeiten ausgedrückt
- Es gilt die folgende Bedingung für jeden Knoten

$$\sum_{j=1}^{N} p_X(x_j | x_i) = 1$$

- Ferner gilt für die Wahrscheinlichkeit des Zustandes x_i

$$p_X(x_i) = \sum_{j=1}^{N} p_X(x_i | x_j) \, p_X(x_j)$$

- Dies ist ein Eigenwertproblem der Zustandsübergangsmatrix

Summen- und Produktregeln sind in der Wahrscheinlichkeitsrechnung von zentraler Bedeutung

Markovsche Modelle

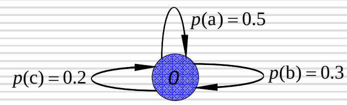
- Allgemeine Formulierung

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ p_X(x_i) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & p_X(x_i \mid x_j) & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \\ p_X(x_j) \end{pmatrix}$$

  - Eigenwertproblem

Fazit: Die Verbundwahrscheinlichkeit einer Sequenz hängt vom Wissen über ihre statistischen Eigenschaften ab.

Markov Modell 0-ter Ordnung



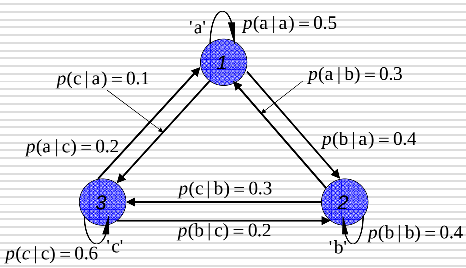
- Gegeben: Alphabet mit 3 Buchstaben
- 3 mögliche Werte der Zustandsvariable X

$$X \in \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\}$$

- Gesucht: Wahrscheinlichkeit des Strings “aacb“

$$p(\mathrm{aacb}) = p(\mathrm{a}) \cdot p(\mathrm{a}) \cdot p(\mathrm{c}) \cdot p(\mathrm{b}) = 0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.2 \cdot 0.3 = 0.015$$

Markov Modell 1-ter Ordnung



- $p(\mathrm{aacb}) = p(\mathrm{a} \mid \mathrm{a}) \cdot p(\mathrm{a} \mid \mathrm{a}) \cdot p(\mathrm{c} \mid \mathrm{a}) \cdot p(\mathrm{b} \mid \mathrm{c}) = 0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.4 \cdot 0.2 = 0.005$