

Informationstheorie

Übung 12

Ausgabe: 6. Februar 2006

12.1 Lineare Codes

Sei \mathcal{C} der kleinste lineare Code über $GF(5)$, welcher die drei Vektoren $\mathbf{c}_1 = 4010102$, $\mathbf{c}_2 = 4120003$ und $\mathbf{c}_3 = 4031004$ enthält.

- Geben Sie eine Generatormatrix \mathbf{G} des Codes \mathcal{C} an.
- Geben Sie einen Vektor $\mathbf{h}_1 \neq \mathbf{0}$ an, für welchen gilt: $\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{h}_1^T = 0$, $\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{h}_1^T = 0$ und $\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{h}_1^T = 0$.
- Zeigen Sie, dass für alle $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$ gilt: $\mathbf{c} \cdot \mathbf{h}_1^T = 0$.
- Geben Sie einige weitere solcher Vektoren $\mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3, \dots$ an. Wie kann die Menge aller dieser Vektoren kompakt beschrieben werden? Wieviele solcher Vektoren gibt es?
- Geben Sie nun die Parity-Check Matrix \mathbf{H} von \mathcal{C} an.
- Wie gross ist die Minimaldistanz von \mathcal{C} ?

12.2 Syndromdecoder

- Geben Sie eine Parity-Check-Matrix für den durch die folgende Generatormatrix erzeugten binären linearen Code an.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Wie gross ist die Minimaldistanz dieses Codes?
- Entwerfen Sie einen Syndromdecoder für den in Teilaufgabe (12.3.a) gegebenen Code. Wie viele Einträge besitzt die Tabelle? Bestimmen Sie die Fehlermuster für die erste Hälfte der Syndrome.

12.3 Duale Hamming-Codes

Sei \mathcal{C} ein Hamming-Code mit Parameter r . Beweisen Sie, dass die Minimaldistanz des zu \mathcal{C} dualen Codes 2^{r-1} ist.

12.4 Codes basierend auf Polynomevaluation

Wir betrachten einen $[5, 3]$ -Code über $GF(5)$ (dem Körper, der durch Addition und Multiplikation modulo 5 definiert ist) basierend auf Polynomevaluation. Dabei definieren jeweils 3 Informationssymbole a_0, a_1, a_2 (aus dem Körper $GF(5)$) ein Polynom

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Das zu (a_0, a_1, a_2) gehörende Codewort ist dann $c = (f(0), \dots, f(4))$.

- a) Geben Sie zu 10 von den 25 Informationsvektoren mit $a_0 = 3$ das zugehörige Codewort an.
- b) Geben Sie die Generatormatrix für diese Codierung an.
- c) Bestimmen Sie daraus eine systematische Generatormatrix für diesen Code.
- d) Berechnen Sie die Parity-Check Matrix für diesen Code.
- e) Was ist die Minimaldistanz dieses Codes? Begründen Sie Ihre Antwort.
Tipp: Man muss dazu nicht unbedingt eine Parity-Check-Matrix berechnen.