ETH Zürich
Dept. Informatik

Prof. Markus Gross
WS 05/06

Informationstheorie

Übung 3

Ausgabe: 21. November 2005
Abgabe: 28. November 2005

3.1 Entropie

Sei X eine Zufallsvariable mit der rechts gegebenen Verteilung. Skizzieren Sie $H(X)$ als Funktion von ε. Bestimmen Sie insbesondere das Maximum von $H(X)$.

X	P_X
1	$1/2$
2	$1/12 + \varepsilon$
3	$5/12 - \varepsilon$

3.2 Zufallsvariablen und Entropie

Seien X und Y zwei unabhängige, faire Münzwürfe, wobei "Kopf" als "0" und "Zahl" als "1" codiert sind.

Weiter seien die Zufallsvariablen A, B, C und D gegeben durch

$$\begin{aligned} A &= X \cdot Y + X \qquad \text{(als ganze Zahlen)} \\ B &= XY \\ C &= (X + Y) \bmod 2 \\ D &= BC \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen P_A, P_B, P_C und P_D.

b) Berechnen Sie die gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilungen P_{XY} und P_{AC}.

c) Berechnen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeitsverteilungen $P_{D|C=1}$ und $P_{B|A\neq 2}$.

d) Sind die Variablen A und C statistisch unabhängig? Wie steht es mit X und C?

e) Berechnen Sie $H(A)$, $H(C)$, $H(AC)$.

f) Was für eine Beziehung besteht zwischen den Werten $H(XY)$, $H(B)$ und $H(D)$?

3.3 Entropiediagramm

Gegeben seien die drei unabhängigen Zufallsvariablen X, Y und Z. Sei $U := XZ$ und $V := YZ$. Zeichnen Sie ein Entropiediagramm, in welchem $H(X), H(Y), H(Z)$, $H(U)$ und $H(V)$ als Flächen dargestellt werden, und welches die Beziehung zwischen diesen Entropien verdeutlicht.

3.4 Entropie in der Physik

Der Zustand eines Gases, welches aus N Molekülen besteht und sich in einem geschlossenen Behälter mit Volumen V befindet, zu einem Zeitpunkt t kann wie folgt charakterisiert werden. Der Behälter wird gedanklich in M gleich grosse Teilbehälter mit konstantem Volumen V_0 unterteilt. Dann wird jedem der N Moleküle eine Zufallsvariable X_i ($i \in \{1, \ldots, N\}$) zugeordnet, die denjenigen Teilbehälter bezeichnet, in dem das Molekül sich zum (festen) Zeitpunkt t aufhält. Durch das N-Tupel $X = (X_1, \ldots, X_N)$ ist somit der Ort jedes Teilchens (bis auf eine Unsicherheit der Grössenordung V_0) eindeutig bestimmt.

a) Wie sieht die Wahrscheinlichkeitsverteilung des N-Tupels X aus, wenn man annimmt, dass jedes Molekül unabhängig von den anderen sich an jedem Ort mit gleicher Wahrscheinlichkeit aufhält? Beachten Sie, dass X wiederum als eine Zufallsvariable aufgefasst werden kann.

b) Wie gross ist $H(X)$?

c) Wie ändert sich $H(X)$, falls das Volumen V verdoppelt wird, während die Teilchenzahl N sowie die Grösse V_0 der Teilbehälter gleich bleibt.

d) Welchen Einfluss hat die Wahl der Konstante V_0 auf die obigen Berechnungen?

e) Die hier berechnete Entropie $H(X)$ entspricht prinzipiell (bis auf eine multiplikative Konstante und den Einbezug der Information über die Geschwindigkeit der Teilchen) der "physikalischen Entropie" des Gases, wie sie in der Thermodynamik verwendet wird. Ein Naturgesetz (2. Hauptsatz der Thermodynamik) besagt, dass die Entropie in einem abgeschlossenen System nie abnimmt. Was bedeutet dies vom informationstheoretischen Standpunkt her betrachtet?