ETH Zürich
Dept. Informatik

Prof. Markus Gross
WS 05/06

Informationstheorie

Übung 4

Ausgabe: 28. November 2005
Abgabe: 5. Dezember 2005

4.1 Entropiediagramme

a) Seien $X_1, \ldots, X_{10}$ zehn binäre, unabhängige, gleichverteilte Zufallsvariablen. Seien

$$\begin{array}{rllllllllll} U = & [X_1, & & X_3, & & X_5, & X_6, & X_7] & & & \\ V = & [X_1, & & & X_4, & X_5, & & & X_8, & X_9, & X_{10}] \\ W = & [& X_2, & X_3, & & X_5, & X_6, & X_7, & & X_9]. & \end{array}$$

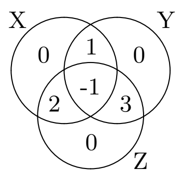
In der Vorlesung haben Sie die informationstheoretischen Grössen kennengelernt, die für drei Zufallsvariablen berechnet werden können. Zeichnen sie das Entropiediagramm für U, V und W, und tragen Sie die sieben Zahlenwerte ein, welche den sieben Flächen im Diagramm entsprechen!

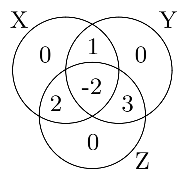
b) Tun Sie das selbe für

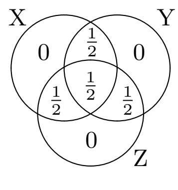
$$\begin{array}{rllll} X = & [X_1, & X_2] & & \\ Y = & [& X_3, & X_4] & \\ Z = & [X_1, & X_3, & & X_2 \otimes X_4] \end{array}$$

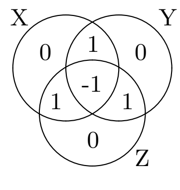
Wobei $\otimes$ den XOR-Operator bezeichnet.

c) Geben Sie für jedes der folgenden Entropiediagramme jeweils eine konkrete Realisierung der Zufallsvariablen X, Y und Z an, die das entsprechende Diagramm liefert - falls dies überhaupt möglich ist.

(i)


(ii)


(iii)


(iv)


4.2 Verteilung für eine gegebene Entropie

a) *(Vordiplomsaufgabe Herbst 02)* Geben Sie, falls möglich, eine Wahrscheinlichkeitsverteilung P_X einer fünfwertigen Zufallsvariable X an, so dass $H(X) = 2$ und jeder der fünf Werte mit einer Wahrscheinlichkeit grösser als Null angenommen wird.
Tipp: Es gibt eine Lösung, für die alle Wahrscheinlichkeiten die Form 2^{-j} mit $j \in \mathbb{N}$ haben.

b) Tun Sie das selbe für eine Zufallsvariable Y mit $H(Y) = 3$.

4.3 Berechnung und Entropie

Seien X und Y zwei Zufallsvariablen, f und g zwei Funktionen (wobei f auf dem Wertebereich von X und g auf dem Wertebereich von Y definiert sind). Beweisen Sie oder widerlegen Sie mit einem Gegenbeispiel folgende Ungleichungen:

a) $H(f(X)) \leq H(X)$

b) $H(f(X)g(Y)) \leq H(XY)$

c) $H(f(X)|g(Y)) \leq H(X|Y)$

d) $I(f(X); g(Y)) \leq I(X;Y)$

4.4 Markov-Ketten & Entropiediagramme

a) Zeichnen Sie das Entropiediagramm für die drei Zufallsvariablen X, Y und Z, wobei $X \to Y \to Z$ [1], und beschriften Sie es mit den relevanten Grössen. Wie unterscheidet sich ihr Diagramm von einem Entropiediagramm für drei beliebige Zufallsvariablen?

b) Beweisen Sie das Informationsverarbeitungslemma [2] mit Hilfe des Entropiediagrammes aus a).

4.5 Kumulierter Gewinn oder Verlust

Eine Spielerin wirft i-mal eine symmetrische Münze. Zeigt die Münze Kopf an, erhält sie einen Franken. Zeigt die Münze Zahl an, muss sie einen Franken bezahlen. Bezeichne X_i die Zufallsvariable, welche angibt, wieviel Franken sie gewonnen (oder, falls X_i negativ, wieviel sie verloren) hat, wenn sie i-mal die Münze wirft.

a) Berechnen Sie $E(X_2)$ und $E(X_3)$ sowie die gemeinsame Verteilung $P_{X_2X_3}$ der Zufallsvariablen X_2 und X_3!

b) Berechnen Sie mit möglichst wenig Rechenaufwand $H(X_3)$ und $H(X_0X_1X_2\cdots X_{10})$!
Tipp: Kettenregel verwenden

c) Bestimmen Sie die gegenseitige Information $I(X_1; X_3)$! Welchen Wert nimmt $I(X_5; X_7)$ an?

---

[1] $X \to Y \to Z \Leftrightarrow$ Die Zufallsvariablen X, Y und Z bilden (in dieser Reihenfolge) eine Markov-Kette

[2] Informationsverarbeitungslemma: Falls $X \to Y \to Z$, so gelten $I(X;Z) \leq I(Y;Z)$ und $I(X;Z) \leq I(X;Y)$