

Kapitel 2: Stochastische Prozesse



Stochastische
Prozesse

Copyright M. Gross,
ETH Zürich 2006, 2007

1

Bedingte Verteilungen

ETH

- Ebenso kann die Verbundwahrscheinlichkeit von n Zufallsvariablen über bedingte Wahrscheinlichkeiten ausgedrückt werden

$$P(X_1 \cdots X_n) = P(X_1 \cdots X_{n-1})P(X_n | X_1, \dots, X_{n-1})$$

$$P(X_1 \cdots X_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i | X_1, \dots, X_{i-1})$$

- Wiederum kommt eine Produktregel zur Anwendung

Summen- und Produktregeln sind in der Wahrscheinlichkeitsrechnung von zentraler Bedeutung

Stochastische
Prozesse

Informationstheorie
Copyright M. Gross, ETH Zürich 2006, 2007

2

Beispiel: Verbunds WS

ETH

- Bedingte Verbundwahrscheinlichkeiten
- Sei $A = X_1$, $B = X_2$, $C = X_3$

- $n=2$: Gesetz von Bayes

$$P(A, B) = P(A) \cdot P(B | A)$$

- $n=3$:

$$P(A, B, C) = P(A) \cdot P(B | A) \cdot P(C | A, B)$$

Stochastische
Prozesse

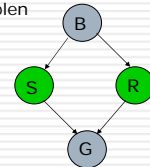
Informationstheorie
Copyright M. Gross, ETH Zürich 2006, 2007

3

Bayes – Netz (1)

ETH

- Vier binäre (True, False) Zufallsvariablen
 - B: Bewölkt
 - S: Sprinkler
 - R: Regen
 - G: Gras ist nass



$P(B=T)$	$P(B=F)$
0.5	0.5

B	$P(S=F)$	$P(S=T)$	B	$P(R=F)$	$P(R=T)$
F	0.5	0.5	F	0.8	0.2
T	0.9	0.1	T	0.2	0.8

Stochastische
Prozesse

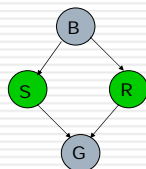
Informationstheorie
Copyright M. Gross, ETH Zürich 2006, 2007

4

Bayes – Netz (2)

ETH

S	R	$P(G=F)$	$P(G=T)$
F	F	1.0	0.0
F	T	0.1	0.9
T	F	0.1	0.9
T	T	0.01	0.99



- Verbundwahrscheinlichkeit

$$P(S, B, R, G) = P(B) \cdot P(S | B) \cdot P(R | B, S) \cdot P(G | B, S, R)$$

$$= P(B) \cdot P(S | B) \cdot P(R | B) \cdot P(G | S, R)$$

$$\text{da } P(R | S) = P(R)$$

Stochastische
Prozesse

Informationstheorie
Copyright M. Gross, ETH Zürich 2006, 2007

5

Bayes – Netz (3)

ETH

- Beobachtung: Gras ist nass.
- Frage: Nass vom Sprinkler oder Regen?

$$P(S = T | G = T) = \frac{P(S = T, G = T)}{P(G = T)}$$

$$= \frac{\sum_{b,r} P(B = b, S = T, R = r, G = T)}{\sum_{b,r,s} P(B = b, S = s, R = r, G = T)}$$

$$= \frac{0.2781}{0.6471} = 0.4237$$

Stochastische
Prozesse

Informationstheorie
Copyright M. Gross, ETH Zürich 2006, 2007

6

Bayes – Netz (4)

ETH

- Beobachtung: Gras ist nass.
- Frage: Nass vom Sprinkler oder Regen?

$$\begin{aligned} P(R = T | G = T) &= \frac{P(R = T, G = T)}{P(G = T)} \\ &= \frac{\sum_{b,s} P(B = b, S = s, R = T, G = T)}{\sum_{b,r,s} P(B = b, S = s, R = r, G = T)} \\ &= \frac{0.4581}{0.6471} = 0.706 \end{aligned}$$

Stochastische
Prozesse

Informationstheorie
Copyright M. Gross, ETH Zürich 2006, 2007

7

Erwartungswert

ETH

- Der **Erwartungswert** $E(X)$ einer diskreten Zufallsvariablen X ist gegeben durch

$$E(X) = \sum_i x_i p(x_i)$$

- Dieser wird oft auch **Mittelwert** von X genannt
- Schwerpunkt der Häufigkeitsfunktion
- Erwartungswerte sind statistische Momente **erster Ordnung**
- Aufgrund der Linearität erhalten wir (Superposition)

$$Y = aX + b \Rightarrow E(Y) = aE(X) + b$$

Stochastische
Prozesse

Informationstheorie
Copyright M. Gross, ETH Zürich 2006, 2007

8

Geometrische Verteilung

ETH

- Produkt ist defekt mit Wahrscheinlichkeit p
- Wie viele Produkte müssen untersucht werden, bis ein defektes Produkt gefunden wird?
- X : Anzahl inspizierter Produkte

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P_X(k) = q^{k-1} \cdot p && \text{wobei } q = 1-p \\ E(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p \cdot q^{k-1} = p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} && \text{wobei } k \cdot q^{k-1} = \frac{d}{dq} \cdot q^k \\ &= p \cdot \frac{d}{dq} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} q^k = p \cdot \frac{d}{dq} \cdot \frac{q}{1-q} \\ &= \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Stochastische
Prozesse

Informationstheorie
Copyright M. Gross, ETH Zürich 2006, 2007

9

Varianz

ETH

- Die **Varianz** $\text{Var}(X)$ einer diskreten Zufallsvariablen X ist gegeben durch

$$\text{Var}(X) = E\{[X - E(X)]^2\}$$

- Vorausgesetzt, dass E existiert
- Für eine diskrete Zufallsvariable X mit $p(x)$ ergibt sich $\text{Var}(X) = \sum_i (x_i - E(X))^2 p(x_i)$
- Ebenso erhalten wir

$$Y = aX + b \Rightarrow \text{Var}(Y) = a^2 \text{Var}(X)$$

Stochastische
Prozesse

Informationstheorie
Copyright M. Gross, ETH Zürich 2006, 2007

10

Bernoulli - Verteilung

ETH

- X hat Bernoulli - Verteilung

$$\begin{aligned} X = 0 &\rightarrow 1-p \\ X = 1 &\rightarrow p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p \\ \text{Var}(X) &= (0-p)^2 \cdot (1-p) + (1-p)^2 \cdot p = p \cdot (1-p) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \text{Maximum bei } p = \frac{1}{2}$$

Stochastische
Prozesse

Informationstheorie
Copyright M. Gross, ETH Zürich 2006, 2007

11

Standardabweichung

ETH

- Die **Standardabweichung** σ ist gegeben durch

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)},$$

- und beschreibt eine Art mittlere Abweichung (Streuung) der Daten vom Mittelwert
- Die Varianz wird oft zur Fehlerberechnung in Messungen verwendet
- Man definiert dazu den mittleren quadratischen Fehler

$$MSE = E[(X - x_0)^2]$$

Stochastische
Prozesse

Informationstheorie
Copyright M. Gross, ETH Zürich 2006, 2007

12

Kovarianz

ETH

- Die **Kovarianz** misst die Verbundvariabilität zweier Zufallsvariablen X und Y

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$
- Oftmals wird folgende Notation verwendet

$$E(X) = \mu_X \quad E(Y) = \mu_Y$$
- Es gilt auch

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$$
 oder auch

$$\text{Cov}(X, Y + Z) = \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(X, Z)$$
- Und vieles mehr... (siehe Rice pp.131ff)

Stochastische Prozesse Informationstheorie 13
Copyright M. Gross, ETH Zürich 2006, 2007

Korrelation

ETH

- Die **Korrelation** zweier Zufallsvariablen X und Y wird über Varianz und Kovarianz definiert

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}$$
- Sie ist von grosser praktischer Bedeutung
- Schliesslich bleibt der bedingte Erwartungswert

$$E(Y|X = x) = \sum_y y p_{Y|X}(y|x)$$
- Es gilt auch

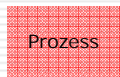
$$E(Y) = \sum_x E(Y|X = x) p_X(x) = E(E(Y|X))$$
- Vergleiche Marginalisierung

Stochastische Prozesse Informationstheorie 14
Copyright M. Gross, ETH Zürich 2006, 2007

Stochastische Prozesse

ETH

- Ein **stochastischer Prozess** $\{X(t_i)\}$ ist ein Wahrscheinlichkeitsprozess, welcher eine Sequenz von Zufallsvariablen $X(t_i)$ erzeugt.
- Zu jedem Zeitpunkt t_i existiert also eine Zufallsvariable, die einer bestimmten Verteilung unterliegt (kontinuierlich) oder bestimmte Werte annehmen kann (diskret).



$$\{X(t_0) = x_0, X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, X(t_3) = x_3, \dots\}$$

Stochastische Prozesse Informationstheorie 15
Copyright M. Gross, ETH Zürich 2006, 2007

Stochastische Prozesse

ETH

- Diskret** bezieht sich also auf Zeit t_i sowie auf mögliche Werte x_k
- Beispiel: Folge von Münzwürfen mit Wahrscheinlichkeiten p für Kopf und $q=1-p$ für Zahl**
- Hierbei gilt die statistische Unabhängigkeit der einzelnen Ergebnisse:

$$x \in \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$$
- Es gilt also für zwei beliebige diskrete Zeiten t_i und t_j

$$P(X(t_i)|X(t_j)) = P(X(t_i))$$
- Das muss nicht so sein (Markov-Ketten)!

Stochastische Prozesse Informationstheorie 16
Copyright M. Gross, ETH Zürich 2006, 2007

Stationarität

ETH

- Ein stochastischer Prozess, dessen statistische Eigenschaften invariant unter Translation der Zeit bleiben, heisst **stationär**.
- Dies bezieht sich auf Momente verschiedener Ordnung
- In der Praxis oft auf Erwartungswerte beschränkt
- Dann gilt also:

$$E(X(t_j)) = E(X(t_{j+k}))$$
 oder auch, dass die Verbundwahrscheinlichkeiten

$$P(X(t_i), X(t_j)) = f(t_i - t_j)$$
 nur von der Zeitdifferenz abhängen

Stochastische Prozesse Informationstheorie 17
Copyright M. Gross, ETH Zürich 2006, 2007

Ergodizität

ETH

- Um einen **ergodischen**, stochastischen Prozess zu definieren, bedarf es einer neuen Variablen

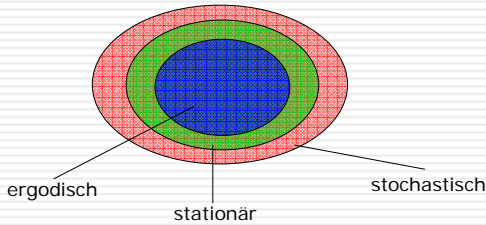
$$X_e = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{X(t_i) + X(t_{i+1}) + X(t_{i+2}) + \dots + X(t_{i+r})}{r+1}$$
- Wir mitteln also über die Werte der Zufallsvariablen einer immer grösseren Sequenz
- Konvergiert dieser Grenzwert gegen eine Konstante X_e gilt für eine beliebige Zufallsvariable $X(t)$

$$E(X(t_i)) = \langle X_e \rangle$$
- Der Erwartungswert über die Zeit ist also gleich dem Erwartungswert der Einzelvariablen

Stochastische Prozesse Informationstheorie 18
Copyright M. Gross, ETH Zürich 2006, 2007

Stochastische Prozesse ETH

- Allgemein: Ergodische Prozesse sind Untermengen von stationären, stochastischen Prozessen



Markov-Prozesse ETH

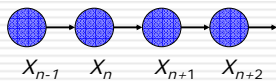
- Ein stochastischer Prozess, welcher eine Sequenz von Zufallsvariablen $\{X_j\}$ ist, heisst **Markov-Kette**, wenn gilt

$$P(X_n = x_k | X_1, \dots, X_{n-1}) = P(X_n = x_k | X_{n-1})$$

- Die bedingte Wahrscheinlichkeit für eine Zufallsvariable ist also nur von ihrem **direkten Vorgänger** abhängig
- Markov-Ketten werden mit einer Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix beschrieben, deren Elemente wie folgt gegeben sind

$$P_{kl} = P(X_n = x_k | X_{n-1} = x_l)$$

Markov-Ketten ETH

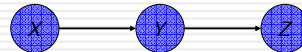


- Die Berechnung der Verbundwahrscheinlichkeit erfolgt durch Produktbildung

$$P(X_{n-1}, X_n, X_{n+1}, X_{n+2}) = P(X_{n-1})P(X_n | X_{n-1})P(X_{n+1} | X_n)P(X_{n+2} | X_{n+1})$$

- Ebenso können bedingte Wahrscheinlichkeiten zu Markov-Feldern erweitert werden

3-stufige Markovkette ETH



- $P(X, Y, Z) = P(X) \cdot P(Y | X) \cdot P(Z | Y)$

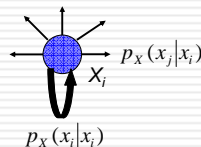
- Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(X, Z | Y) = \frac{P(X, Y, Z)}{P(Y)} = \frac{P(X) \cdot P(Z | Y)}{P(Y)} = P(X | Y) \cdot P(Z | Y)$$

- Spezialfall eines Bayes-Netzes

Markov Zustandsautomaten ETH

- **Markov-Prozesse** eignen sich zur verfeinerten Modellierung einzelner diskreter Zufallsvariablen
- Dazu verwendet man einen **probabilistischen, endlichen Automaten**, welcher alle Zustände $\{x_j\}$ einer Variablen Z beschreibt
- Jeder Zustand x_j bleibt entweder erhalten, oder wird in Richtung eines anderen Zustandes x_j verlassen



Markovsche Modelle ETH

- Dies wird mit Übergangswahrscheinlichkeiten ausgedrückt
- Es gilt die folgende Bedingung für jeden Knoten

$$\sum_{j=1}^N p_X(x_j | x_i) = 1$$

- Ferner gilt für die Wahrscheinlichkeit des Zustandes x_i

$$p_X(x_i) = \sum_{j=1}^N p_X(x_i | x_j) p_X(x_j)$$

- Dies ist ein Eigenwertproblem der Zustandsübergangsmatrix

[Summen- und Produktregeln sind in der Wahrscheinlichkeitsrechnung von zentraler Bedeutung](#)

Markovsche Modelle

ETH

- Allgemeine Formulierung

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ p_X(x_i) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ p_X(x_j | x_j) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

- Eigenwertproblem



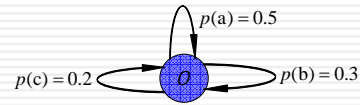
Fazit: Die Verbundwahrscheinlichkeit einer Sequenz hängt vom Wissen über ihre statistischen Eigenschaften ab.

Stochastische
Prozesse

Informationstheorie
Copyright M. Gross, ETH Zürich 2006, 2007

25

Markov Modell 0-ter Ordnung ETH



- Gegeben: Alphabet mit 3 Buchstaben
- 3 mögliche Werte der Zustandsvariable X
 $X \in \{a, b, c\}$
- Gesucht: Wahrscheinlichkeit des Strings "aacb"

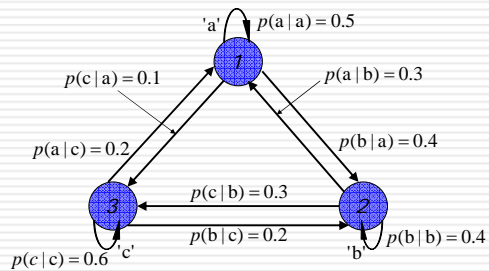
$$\begin{aligned} p(\text{aacb}) &= p(a) \cdot p(a) \cdot p(c) \cdot p(b) \\ &= 0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.2 \cdot 0.3 = 0.015 \end{aligned}$$

Stochastische
Prozesse

Informationstheorie
Copyright M. Gross, ETH Zürich 2006, 2007

26

Markov Modell 1-ter Ordnung ETH



- $p(\text{aacb}) = p(a|a) \cdot p(a|a) \cdot p(c|a) \cdot p(b|c)$
 $= 0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.1 \cdot 0.2 = 0.005$

Stochastische
Prozesse

Informationstheorie
Copyright M. Gross, ETH Zürich 2006, 2007

27