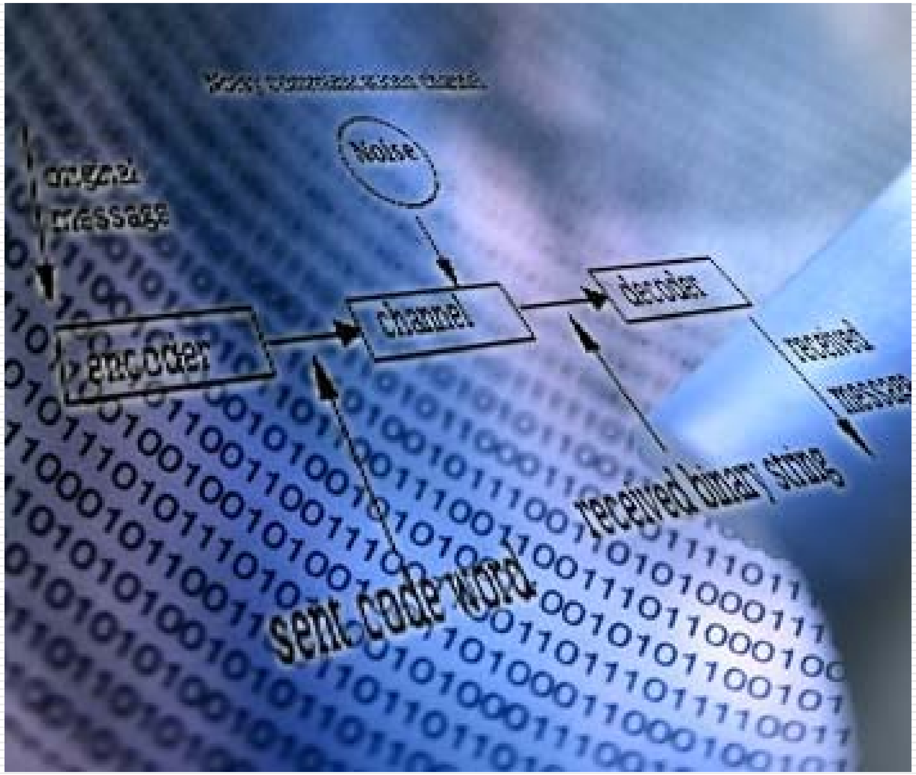
Kapitel 6:
Codierung Diskreter Quellen

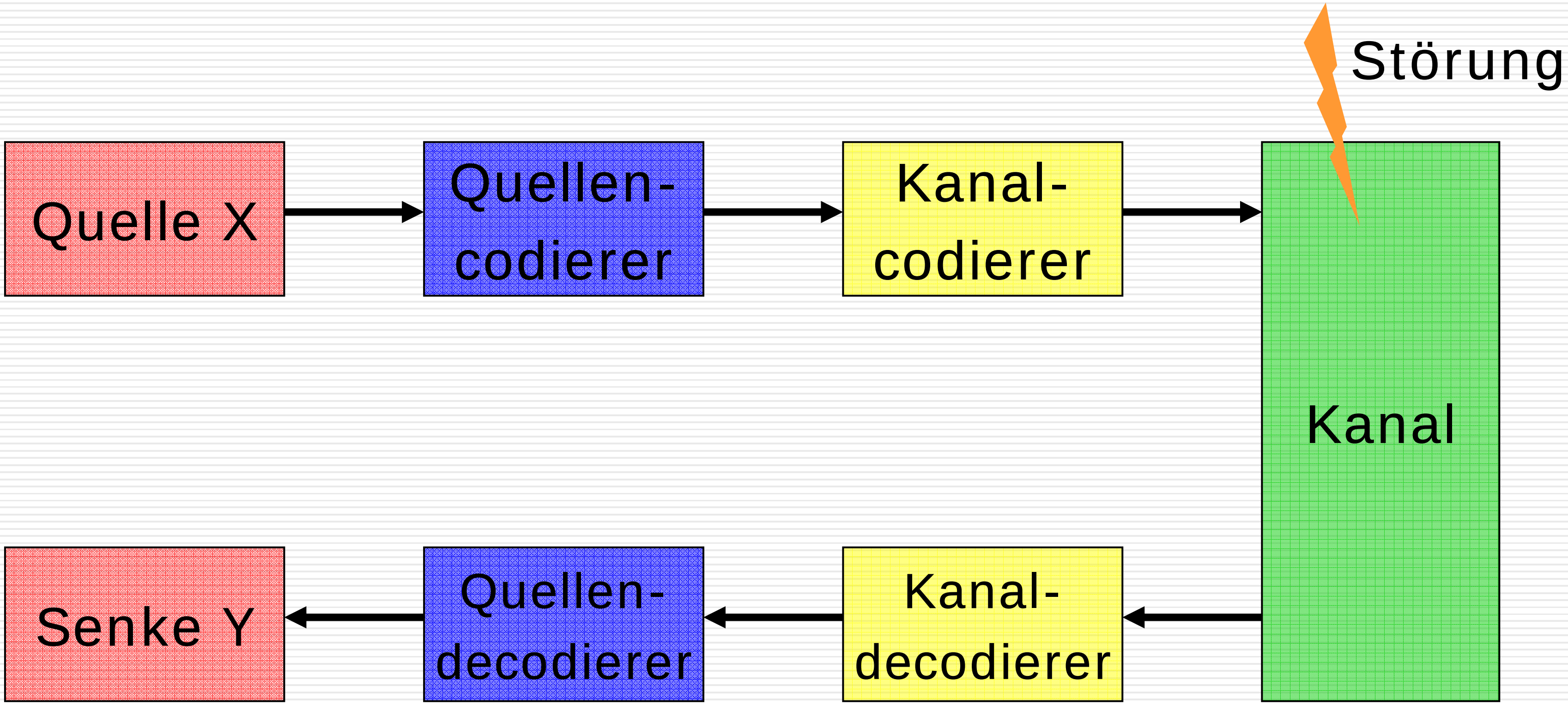


Ziele des Kapitels

- Die Entropie als Informationsmass für die Güte eines Codes
- Begriff der Datenkompression
- Eindeutig decodierbare Codes
- Mittlere Codelänge kann nicht kleiner als Quellenentropie sein
- Kraft‘sche Ungleichung
- 1. Shannon'sches Codierungstheorem

Übertragungsmodell

- Wir betrachten das folgende Übertragungsmodell



Definitionen

- Die Quellencodierung ist die erste Stufe der Codierung in unserem Modell
- Hier soll die eineindeutige Codierung in einer möglichst redundanzfreien Form erfolgen
- Die Kanalcodierung ist die zweite Stufe der Codierung
- Hier wird oft gezielt zusätzliche Kontrollinformation zum Störungsschutz in den Code eingebaut
- In diesem Kapitel behandeln wir ausschliesslich redundanzfreie Quellencodierung

Definitionen

- Definition: Ein Code C über dem Codealphabet Δ mit $|\Delta|=D$ für eine Menge χ ist eine Abbildung von χ auf Δ^*
- Für $x \in \chi$ bezeichnet $C(x)$ das Codewort und $l_c(x)$ die Länge von $C(x)$
- Wenn mit $x_1 \neq x_2$ auch $C(x_1) \neq C(x_2)$ sowie $C(x)$ nie das leere Wort ist, dann heisst der Code nicht-degeneriert
- Oftmals bezeichnet man einfach die Menge der Codewörter als Code
- Beispiel: Für χ = {a,b,c,d} ist C(a)=0; C(b)=10, C(c)=110 und C(d)=111 ein Code

Definitionen

- Wir bezeichnen mit || die Konkatenation einzelner Codewörter
- Definition: Ein Code C ist eindeutig decodierbar, wenn folgende Abbildung eindeutig ist

$$\left[x_1 \| \ldots \| x_n\right] \rightarrow \left[C(x_1) \| \ldots \| C(x_n)\right]$$

- Definition: Ein Code C heisst präfixfrei, wenn kein Codewort ein Präfix eines anderen Codewortes ist, also für zwei Codewörter c und c', niemals $c' = c \| d$ gilt mit $d \in \Delta^*$

Präfixfreiheit und eindeutige Decodierbarkeit sind Eigenschaften der Codewortmenge. Jeder präfixfreie Code ist eindeutig decodierbar.

Definitionen

- Im folgenden sind wir an der Codierung einer diskreten Quelle, also einer Zustandsvariablen X mit Verteilung $p_X(x)$ interessiert.
- Wir unterscheiden zwischen average case und worst case Analyse
- Definition: Ein Code C zur Codierung einer Zufallsvariablen heisst optimal, wenn die mittlere Codelänge minimal ist, also

$$E\left[l_C(X)\right] = \sum_{x \in \chi} p_X(x) l_C(x) \rightarrow \min$$

- Definition: Ein Code C, dessen Codewörter alle (nicht) gleich lang sind, heisst (un)gleichmässig

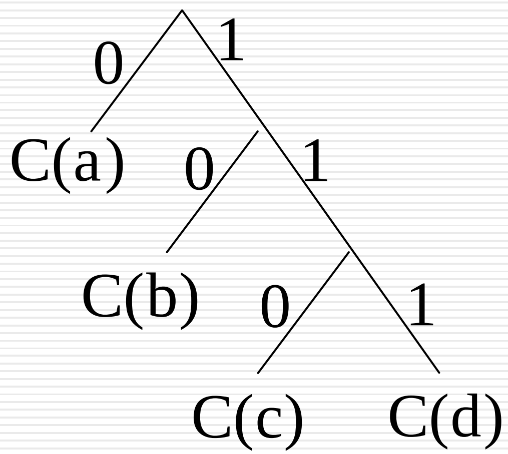
Ungleichmässige Codes

- Code 1: Gegeben χ = {a,b,c,d} sowie C(a)=0, C(b)=10, C(c)=110 und C(d)=111
- präfixfrei, Baumstruktur

$$0001101100011010111$$

$$0|0|0|110|110|0|110|10|111$$

a a a c c a c b d



- ungleichmässig

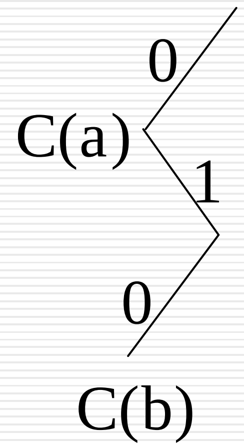
Ungleichmässige Codes

- Code 2: Gegeben χ = {a,b} sowie C(a)=0, C(b)=010
- Nicht präfixfrei, dennoch eindeutig decodierbar

$$0001001000100010 0$$

$$0\,|\,0\,|\,010\,|\,010\,|\,0\,|\,010\,|\,0\,|\,010\,|\,0$$

a a b b a b a b a



- ungleichmässig

Gleichmässige Codes

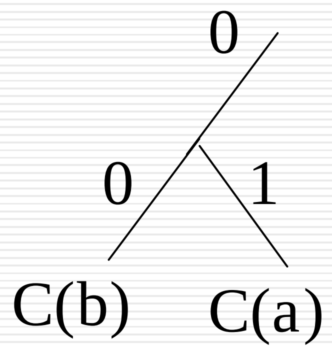
- Code 3: Gegeben χ = {a,b} sowie C(a)=01, C(b)=00

$$0001000001$$

$$00\,|\,01\,|\,00\,|\,00\,|\,01$$

$$\text{b} \quad \text{a} \quad \text{b} \quad \text{b} \quad \text{a}$$

- gleichmässig



Ungleichmässige Codes

- Code 4: Gegeben χ = {a,b,c} sowie C(a)=0, C(b)=01, C(c)=10
- nicht präfixfrei

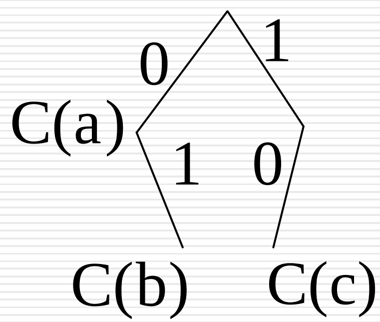
$$010010100$$

$$0|10|0|10|10|0$$

a c a c c a

$$01|0|01|0|10|0$$

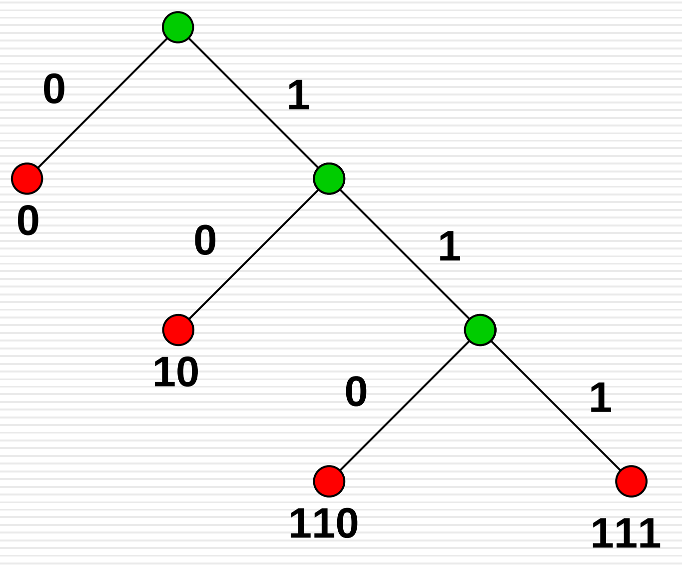
b a b a c a



- ungleichmässig
- nicht eindeutig decodierbar

Codebäume

- Beispiel: Für χ = {a,b,c,d} ist C(a)=0, C(b)=10, C(c)=110 und C(d)=111 ein Code
- Wir stellen fest, dass der Code als Baum dargestellt werden kann



Codebäume

- Jeder Code kann als Teilmenge der Knoten eines Baumes dargestellt werden.
- Jeder Knoten ist entweder ein Blatt (keine Nachfolgeknoten), oder hat höchstens D Nachfolgeknoten
- In unserem Beispiel ist $D=2$, also binärer Baum
- Ein Codebaum ist ausgefüllt, wenn jeder innere Knoten genau D Nachfolger hat
- Ein präfixfreier Code ist ausgefüllt, wenn der Codebaum ausgefüllt ist und jedem Blatt ein Codewort zugeordnet ist

Codebäume

- Sei B die Menge aller Blätter eines D-ären Codebaumes T, und sei $P(b)$ die Wahrscheinlichkeit eines Blattes $b \in B$
- Es gilt:

$$\sum_{b \in B} P(b) = 1$$

- Die Blattentropie von T ist definiert als

$$H_T = -\sum_{b \in B} P(b) \log P(b)$$

- Die Tiefe $t(b)$ eines Blattes ist die Distanz von der Wurzel

Codebäume

- Dann ist folglich die mittlere Tiefe t_T von T

$$t_T = \sum_{b \in B} P(b)t(b)$$

- Für einen ausgefüllten, präfixfreien Code C für eine Zufallsvariable X mit Codebaum T ist t_T gleich der mittleren Wortlänge,

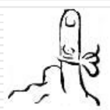
$$p_X(x) = P(b) \quad \text{mit} \quad C(x) = b$$

- ...wenn die Blätter mit den Wahrscheinlichkeiten der codierten Symbole versehen werden

Kraft'sche Ungleichung

- Theorem (Kraft'sche Ungleichung): Ein *D*-ärer präfixfreier Code mit *L* Codewörtern der Längen $l_1,\ldots,l_L$ existiert genau dann, wenn

$$\sum_{i=1}^{L} \mathrm{D}^{-l_i} \leq 1$$



Die Kraft’sche Ungleichung ist also eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines Präfixcodes der gegebenen Struktur

Kraft'sche Ungleichung

- Beweis I: (Präfixcode->Ungleichung)
- Wir zeigen zunächst, dass für jeden *D*-ären präfixfreien Code diese Bedingung gilt:

$$\sum_{i=1}^{L} \mathrm{D}^{-l_i} \leq 1$$

- Dies ist äquivalent mit

$$\sum_{b \in \mathrm{B}} D^{-t(b)} \leq 1$$

Kraft'sche Ungleichung

- Angenommen, der Baum wächst von der Wurzel her (Induktion)
- Für die Wurzel gilt $|B|=1$:

$$\sum_{b \in B} D^{-t(b)} = D^{-t(b)} = D^{-0} = 1$$

- Wird nun die Wurzel durch D Blätter einer um 1 höheren Tiefe ersetzt, so gilt $|B|=D$ sowie

$$\sum_{b \in B} D^{-t(b)} = \sum_{i=1}^{D} D^{-1} = 1$$

- Die Summe bleibt also unverändert

Kraft'sche Ungleichung

- Ersetzen wir nun erneut ein Blatt der Tiefe *1* durch *D* Blätter der Tiefe 2, so gilt $|B|=D-1+D=2*D-1$ sowie

$$\sum_{b\in B} D^{-t(b)} = \sum_{i=1}^{D-1} D^{-1} + \sum_{i=1}^{D} D^{-2} = \sum_{i=1}^{D-1} D^{-1} + D^{-1} = 1$$

- Allgemein gilt beim Ersatz eines Blattes der Tiefe *t*

$$D^{-t(b)} = D \cdot D^{-t(b)-1}$$

- Bei weniger neuen Blättern nimmt die Summe strikt ab
- Also gilt für einen *D*-ären Baum mit Blattmenge *B*

$$\sum_{b\in B} D^{-t(b)} \leq 1$$

- Mit Gleichheit für einen ausgefüllten Baum. Q.e.d

Kraft'sche Ungleichung

- Beweis II: (Ungleichung->Präfixcode)
- Wir zeigen nun, dass die Bedingung auch hinreichend ist (konstruktiv)
- Wir bezeichnen mit w_j die Anzahl der Codewörter der Länge j
- Somit gilt:
$$\sum_{j=1}^{\infty} w_j = |B|$$
- Sowie $$\sum_{i=1}^{L} D^{-l_i} = \sum_{j=1}^{\infty} w_j D^{-j} \leq 1$$
- Wir konstruieren nun sukzessive einen vollständigen D-ären Baum
- Wir beginnen bei Tiefe 1 und D Blättern

Kraft'sche Ungleichung

- Es bleiben w_1 Blätter als Codewörter stehen und D-w_1 Blätter werden zu insgesamt $D(D-w_1)$ Knoten der Tiefe 2.
- Wir belassen wiederum w_2 Blätter als Codewörter und ersetzen den Rest durch insgesamt $D(D(D-w_1)-w_2)$ Knoten der Tiefe 3 usw. für $m=1,2,3,\ldots$.
- Dies funktioniert genau dann, wenn in jedem Schritt noch genug Blätter als Codewörter vorhanden sind, also

$$w_m \leq D^m - \sum_{j=1}^{m-1} w_j D^{m-j}$$

- Division durch D^m ergibt: $\sum_{j=1}^{m} w_j D^{-j} \leq 1$
- Q.e.d.

McMillan Theorem

- Theorem (McMillan): Die Codewortlängen $l_1,\ldots,l_L$ jedes eindeutig decodierbaren Codes für ein Alphabet mit L Symbolen erfüllen ebenfalls die Kraft'sche Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{L} D^{-l_i} \le 1$$

- Insbesondere existiert immer ein präfixfreier Code mit den gleichen Codewortlängen
- Eindeutig decodierbare Codes können also nicht besser sein als präfixfreie Codes (kein Beweis)

Implikationen

- Für den Fall eines binären, präfixfreien Codes gilt entsprechend

$$\sum_{i=1}^{L} 2^{-l_i} \leq 1$$

- Jeder präfixfreie Code muss auch die Kraft'sche Ungleichung erfüllen
- Die Kraft'sche Ungleichung ist eine notwendige Bedingung für die Existenz eines eindeutig decodierbaren Codes mit spezifizierten Codewortlängen
- Sie ist eine notwendige Bedingung für die eindeutige Dekodierbarkeit
- Nicht jeder Code der Struktur ist eindeutig decodierbar

Kraft'sche Ungleichung

- Codierung einer diskreten Quelle X mit $L=6$ Zeichen und Codes mit $l_{max} = 4$
- Wir analysieren 4 Varianten:

X	K1	K2	K3	K4
a	00	00	00	0
b	01	01	01	100
c	10	10	10	101
d	110	110	110	110
e	111	1110	1110	1110
f	1101	1101	1111	1111

Kraft'sche Ungleichung

- Wir prüfen:
  1) Präfixbedingung
  2) Kraft'sche Ungleichung

- K1
  1) nicht erfüllt: d und f haben den gleichen Präfix
  2) nicht erfüllt

$$3 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{16} > 1$$

- K2
  1) nicht erfüllt: d und f haben den gleichen Präfix
  2) erfüllt

$$3 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{16} = 1$$

Kraft'sche Ungleichung

- K3
  1) erfüllt
  2) erfüllt

- K4
  1) erfüllt
  2) erfüllt

- Eindeutig dekodierbar sind nur K3 und K4
- Kraft'sche Ungleichung impliziert Existenz eines decodierbaren Codes

1. Shannon'sches Codierungstheorem

- Wir suchen Schranken für die mittlere Codelängen optimaler, präfixfreier Codes
- Theorem (Shannon): Die mittlere Codewortlänge $E[l_C(X)]$ eines optimalen präfixfreien Codes C über einem Codealphabet Δ mit $|\Delta|=D$ für eine Zufallsvariable X erfüllt

$$\frac{H(X)}{\log D} \leq E[l_C(X)] < \frac{H(X)}{\log D} + 1$$

- Für $D=2$ gilt

$$H(X) \leq E[l_C(X)] < H(X) + 1$$

Absolut fundamental!

1. Shannon'sches Codierungstheorem

- Beweis (untere Schranke): Wir betrachten den entsprechenden Codebaum und erinnern uns, dass

$$t_T = E[l_C(X)] \quad \text{sowie} \quad H_T = H(X)$$

- Die untere Schranke entspricht somit

$$H_T \leq t_T \log D$$

- Wir beweisen die Ungleichung mittels Induktion über Teilbäume
- Für einen leeren Baum gilt die Beziehung trivialerweise
- Jeder D-äre Baum kann als Wurzel mit bis zu D disjunkten Teilbäumen aufgefasst werden, $T_1,\ldots,T_D$ mit disjunkten Blattmengen $B_1,\ldots,B_D$

1. Shannon'sches Codierungstheorem

- Sei die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Blätter in Teilbaum T_i mit Blattmenge B_i

$$q_i = \sum_{b \in B_i} P(b)$$

- Wir normieren die Verteilung im Teilbaum T_i durch Division, so dass

$$1 = \sum_{b \in B_i} \frac{P(b)}{q_i}$$

- Die mittlere Blatttiefe t_i im Teilbaum ist

$$t_i = \sum_{b \in B_i} \frac{P(b)}{q_i}(t(b) - 1)$$

1. Shannon'sches Codierungstheorem

- Die Blattentropie ist entsprechend

$$H_i = -\sum_{b \in B_i} \frac{P(b)}{q_i} \log \frac{P(b)}{q_i}$$

- Als Induktionsannahme gilt

$$H_i \leq t_i \log D \quad \forall i$$

- Die mittlere Blatttiefe des ganzen Baum ist dann

$$t_T = \sum_{i=1}^{D} q_i (t_i + 1) = 1 + \sum_{i=1}^{D} q_i t_i$$

- Für die Blattentropie gilt dann:

$$H_T = \sum_{i=1}^{D} \left(-q_i \log q_i - q_i \sum_{b \in B_i} \frac{P(b)}{q_i} \log \frac{P(b)}{q_i} \right)$$

1. Shannon'sches Codierungstheorem

- Herleitung:

$$H_T = -\sum_{i=1}^{D} \left(\sum_{b \in B_i} P(b) \log P(b) \right)$$

$$H_T = -\sum_{i=1}^{D} \left(\sum_{b \in B_i} P(b) \left(\log \frac{P(b)}{q_i} + \log q_i \right) \right)$$

$$H_T = -\sum_{i=1}^{D} \left(q_i \log q_i + \sum_{b \in B_i} P(b) \log \frac{P(b)}{q_i} \right)$$

$$H_T = \sum_{i=1}^{D} \left(-q_i \log q_i - q_i \sum_{b \in B_i} \frac{P(b)}{q_i} \log \frac{P(b)}{q_i} \right)$$

1. Shannon'sches Codierungstheorem

- Entsprechend umgeformt

$$H_T = \sum_{i=1}^{D} \left(-q_i \log q_i + q_i H_i\right)$$

$$H_T = H([q_1 ... q_D]) + \sum_{i=1}^{D} q_i H_i$$

- Aufgrund unserer Annahmen sowie den Grenzen der Entropiefunktion gilt

$$H_T \leq \log D + \sum_{i=1}^{D} q_i t_i \log D$$

$$H_T \leq \log D (1 + \sum_{i=1}^{D} q_i t_i) = t_T \log D$$

1. Shannon'sches Codierungstheorem

- Beweis (obere Schranke): Eine intuitiv sinnvolle Wahl der Codewortlängen wäre

$$l_C(x) = -\log_D p_X(x) \quad \forall x \in X$$

- Die Codewortlänge sollte also dem negativen Logarithmus der entsprechenden Symbolwahrscheinlichkeiten entsprechen
- Die Kraft'sche Ungleichung wäre nun mit Gleichheit erfüllt, da

$$\sum_{x\in\chi} D^{-l_C(x)} = \sum_{x\in\chi} D^{-(-\log_D p_X(x))} = \sum_{x\in\chi} p_X(x) = 1$$

- Ein solcher Code existiert allerdings nur, wenn alle Codelängen ganzzahlig sind

1. Shannon'sches Codierungstheorem

- Also wählen wir statt dessen

$$l_C(x) = \lceil -\log_D p_X(x) \rceil \quad \forall x \in X$$

- Die Kraft'sche Ungleichung gilt immer noch, da

$$\sum_{x\in\chi} D^{-l_C(x)} = \sum_{x\in\chi} D^{-\lceil -\log_D p_X(x)\rceil} \le \sum_{x\in\chi} D^{\log_D p_X(x)} = \sum_{x\in\chi} p_X(x) = 1$$

- Somit existiert ein Code für diese Codelängen. Seine mittlere Codelänge ist

$$E[l_C(x)] = \sum_{x\in\chi} p_X(x) \lceil -\log_D p_X(x) \rceil \le 1 + \sum_{x\in\chi} p_X(x)(-\log_D p_X(x)) = 1 + \frac{H(X)}{\log D}$$

- Wir nutzen hierbei, das

$$\lceil u \rceil \le u + 1$$

Implikationen

- Wir haben zum ersten Mal die Nützlichkeit der Entropie als Informationsmass gerechtfertigt
- Wir erhalten einen Zusammenhang zwischen der Entropie einer Zufallsvariablen und der Güte eines optimalen Codes dafür
- Obere Schranke ist um 1 grösser als untere Schranke
- Untere Schranke wird im allgemeinen nicht erreicht
- Der Einfluss von Fehlern bei zu starker Kompression ist noch nicht bekannt