ETH Zürich
Dept. Informatik

Prof. Markus Gross
WS 06/07

Informationstheorie

Übung 1

Ausgabe: 30. Oktober 2006
Abgabe: 6. November 2006

1.1 Zufallsexperimente und Zufallsvariablen

Wir betrachten im Folgenden den Wurf von 6-seitigen Würfeln.

a) Beschreiben Sie den Wurf eines fairen[1] Würfels als endliches Zufallsexperiment. Wieviele verschiedene Ereignisse kann es beim Wurf geben?

b) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz für die Zufallsvariable X, die der Augenzahl des fairen Würfels entspricht.

c) Führen sie beide obige Aufgaben für den Wurf zweier fairer Würfel durch. Dabei seien die Zufallsvariablen X_i, $i \in \{1, 2\}$ gegeben, welche jeweils der Augenzahl des Würfels i entsprechen.

d) Nun definieren wir weitere Zufallsvariablen $S := X_1 + X_2$ und $P := X_1X_2$. Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen P_S, P_P, $P_{SX_1|X_2}$ und $P_{X_1|SX_2}$ an. (Tipp: Erstellen Sie eine Tabelle; Sie werden merken, dass sich die letzten beiden Verteilungen sehr effizient darstellen lassen.)

e) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit $P(S > 4)$?

f) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz für die Zufallsvariable X, die der Augenzahl eines manipulierten Würfels entspricht, wobei folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung P_X gegeben ist:

x	1	2	3	4	5	6
$P_X(x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

g) Berechnen Sie die Erwartungswerte der folgenden Zufallsvariablen für den manipulierten Würfel.

i. $Y_1 := X^2$
ii. $Y_2 := P_X(X)$
iii. $Y_3 := \frac{1}{P_X(X)}$

[1] Dies bedeutet, dass jede Augenzahl gleich wahrscheinlich ist.

1.2 Fensterlädenkommunikation

Annemarie und Beat wohnen auf zwei verschiedenen Hügeln gegenüber. Annemarie benutzt die Fensterläden eines ihrer Fenster, um Beat etwas mitzuteilen: Je nach Nachricht werden beide Fensterläden von ihr geöffnet, oder beide geschlossen. Da Beat nicht besonders oft aus dem Fenster sieht, muss Annemarie die Läden immer eine Stunde lang in der gleichen Position lassen.

Jeden Montag Abend gehen die beiden zusammen ins einzige Kino der Stadt, jedoch nicht immer zur gleichen Zeit. Annemarie bestimmt die Zeit und übermittelt sie am Vortag um 12 Uhr mittags an Beat.

- **a)** Die Filme beginnen immer um 18:00, 20:15, 20:45 oder 21:00 Uhr. Geben Sie ein Verfahren an, so dass die Übermittlung der Uhrzeit möglichst kurz ist. Wie lange dauert es?
- **b)** Nach einer Weile bemerken die beiden, dass sie bedeutend öfters um 20:15 Uhr ins Kino gehen, nämlich etwa zu 50%. Zu 25% gehen sie um 21:00 Uhr ins Kino, und nur zu 12.5% um 18:00 oder 20:45 Uhr. Versuchen Sie ein Verfahren zu finden, für welches die *mittlere* Übermittlungszeit kleiner ist als bei a).
- **c)** Was ist der Grund, dass die mittlere Übermittlungszeit bei b) kleiner sein kann als bei a)?
- **d)** Nun werden zwei neue Kinos eröffnet. Annemarie und Beat beschliessen, jede Woche zufällig in ein Kino zu gehen, jedoch niemals zweimal hintereinander in das gleiche. Wie müssen sie ihr Verfahren anpassen?
- **e)** Annemarie und Beat beschliessen schliesslich, immer um 20:15 ins alte Kino zu gehen. Geben Sie ein Verfahren für diese Situation an. Wie gross ist nun die Übermittlungszeit?

1.3 Schlechtwetterkommunikation

Bei Nebel haben Annemarie und Beat aus Aufgabe 2 ein Problem: Zwar kann Beat das Haus von Annemarie immer noch sehen, er kann aber nicht ohne Fehler bestimmen, ob Annemarie die Läden geschlossen oder geöffnet hat. Dadurch errät er etwa $\varepsilon = 10\%$ der Übertragungen eines einzelnen Bits falsch.

- **a)** Wie gross ist die Fehlerwahscheinlichkeit, dass von 2 solchen Übertragungen (eines einzelnen Bits) mindestens ein Fehler auftritt? Wie gross ist sie bei 3 Übertragungen?
- **b)** Geben Sie ein Verfahren an, wie Annemarie mit Hilfe mehrerer Übertragungen ein Bit an Beat mitteilen kann, so dass die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers kleiner als 10% ist. Geht es mit 2 Übertragungen? Oder mit 3? Wie gross ist jeweils die Fehlerwahrscheinlichkeit?
- **c)** Kann Ihr Verfahren den Fehler auch verringern, wenn dieser 50% beträgt? Wieso?
- **d)** Versuchen Sie nun, die Fehlerwahrscheinlichkeit bei der Mitteilung von 2 Bits möglichst klein zu machen, wobei hierfür höchstens 6 Übertragungen verwendet werden dürfen. Wie gross ist die Fehlerwahrscheinlichkeit Ihres Verfahrens?