

Informationstheorie

Übung 4

Ausgabe: 20. November 2006

Abgabe: 27. November 2006

4.1 Würfel

Aus Vordiplom Frühjahr 00: Es seien W_1 , W_2 und W_3 unabhängige Würfe eines fairen Würfels. Wir bezeichnen mit S die Summe und mit P das Produkt der drei Augenzahlen.

- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle 3 Würfe Sechser sind, gegeben, dass mindestens zwei Würfe Sechser sind?
- Berechnen Sie $I(W_1; W_2 | W_3, S = 4)$.
- Berechnen Sie $H(W_1 W_2 W_3 | P = 30)$.

4.2 Entropie und Information

Aus Vordiplom Frühjahr 00: Seien X , Y und Z beliebige diskrete Zufallsvariablen. Beweisen Sie die folgenden informationstheoretischen Ungleichungen, indem Sie die Differenz als eine Grösse darstellen, die sicher nichtnegativ ist!

- $I(XY; Z) \geq I(X; Z)$
- $H(XY|Z) \geq H(X|Z)$
- $H(XZ) - H(X) \geq H(XYZ) - H(XY)$

4.3 Markovketten

Sei $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ eine Markovkette. Man sagt übrigens auch, dass X und Z unabhängig sind bedingt auf Y .

- Beweisen Sie, dass $H(XZ|Y) = H(X|Y) + H(Z|Y)$.
- Beweisen Sie mit obigem Ergebnis, dass $I(XZ; Y) = I(X; Y) + I(Z; Y) - I(X; Z)$.
- Überlegen Sie sich (a) und (b) anhand des Entropiediagramms.

4.4 Informationstheorie im Bierglas

Aus Vordiplom Frühjahr 01: Wir betrachten zwei Bierschaumbläschen mit einer Halbwertszeit von einer Minute. D.h., für jedes der beiden Bläschen gilt unabhängig, falls es zu einem Zeitpunkt i noch vorhanden ist, dann ist es mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ eine Minute später geplatzt. Die Zufallsvariable S_i bezeichne die Anzahl dieser zwei Bläschen, die nach i Minuten noch vorhanden sind (es gilt also $2 = S_0 \geq S_1 \geq S_2 \geq \dots$).

a) Bestimmen Sie die folgenden informationstheoretischen Grössen.

i. $H(S_1)$

ii. $H(S_2|S_1)$

iii. $I(S_1; S_2)$

iv. $I(S_1; S_3|S_2)$

b) Berechnen Sie die Gesamtentropie $H(S_1 S_2 S_3 \dots)$.

Tipp: Schreiben Sie die bedingte Entropie $H(S_2 S_3 \dots | S_1)$ auf zwei verschiedene Arten, einmal gemäss Definition und einmal als $\sum_{s_1} H(S_2 S_3 \dots | S_1 = s_1) P_{S_1}(s_1)$, um eine Gleichung für $H(S_1 S_2 S_3 \dots)$ zu gewinnen. Benutzen Sie weiter, dass $1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{16} + \dots = 2$.